Índice General

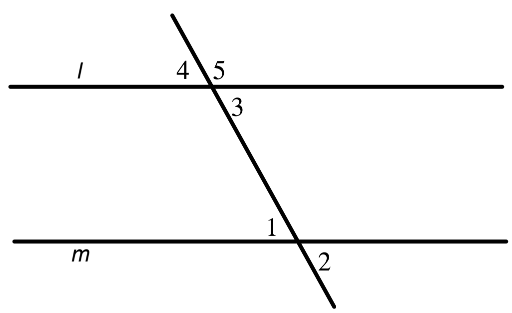
CAPíTULO 1

Conceptos y teoremas básicos

1. Angulos entre paralelas.

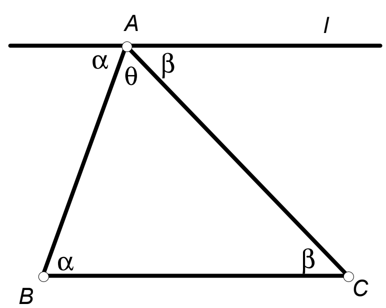
Consideremos líneas que se hallan en un mismo plano y que no se intersectan por más que se prolonguen. A este tipo de líneas las llamaremos *líneas paralelas*. Si una línea corta a un par de paralelas (l y m) entonces forma ángulos con éstas, los cuales mantienen la siguiente relación:

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ y se llaman ángulos *opuestos por el vértice,*
$\measuredangle 1 = \measuredangle 3$ y se llaman ángulos *alternos internos,*
$\measuredangle 1 = \measuredangle 4$ y se llaman ángulos *correspondientes,*
$\measuredangle 2 = \measuredangle 4$ y se llaman ángulos *alternos externos,*



además, también tenemos que $\measuredangle 4 + \measuredangle 5 = 180°$ y se dice que $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 5$ son *suplementarios*. Aprovechando todo esto podemos probar el siguiente teorema:

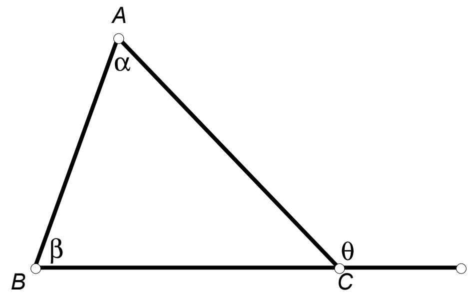
TEOREMA 1. *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$*.*



DEMOSTRACIÓN. Sea l una línea paralela a BC, la demostración es evidente al observar la figura anterior, ya que $\measuredangle\alpha + \measuredangle\theta + \measuredangle\beta = 180°$. ∎

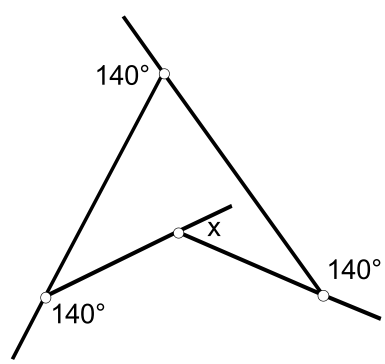
1.1. Ejercicios.

Ejercicio 1. *Encuentra cuánto vale el ángulo exterior θ en la siguiente figura si son conocidos los ángulos α y β:*



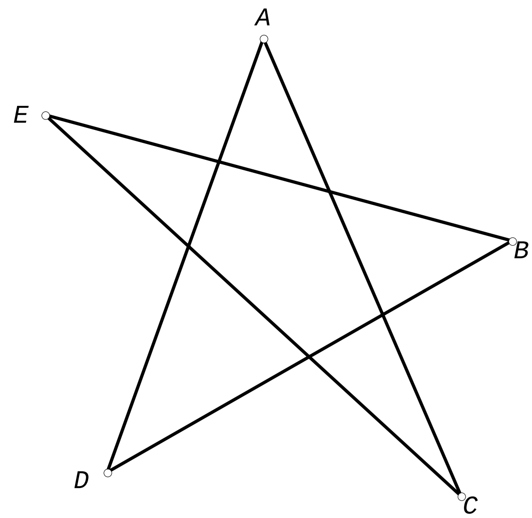
Ejercicio 2. *Encuentra cuánto vale la suma de los ángulos internos de un polígono convexo*[1] *de n vértices.*

Ejercicio 3. *Encuentra cuánto vale el ángulo x en la siguiente figura.*



Ejercicio 4. *Calcula la suma de los ángulos internos en los vértices A, B, C, D y E.*

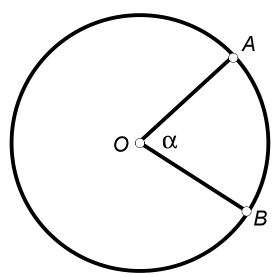
[1] Una figura se dice que es convexa, si para cualesquiera dos puntos en ella, el segmento que los une está totalmente contenido en la figura.



2. Angulos en circunferencias

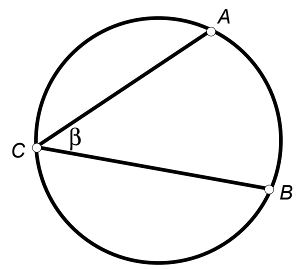
Existen distintos tipos de ángulos en las circunferencias, los cuales podemos calcular en función de los arcos que intersectan. La manera en que se calculan depende de si el vértice del ángulo se encuentra dentro, sobre, ó fuera de la circunferencia. Veamos cada uno de ellos y la manera de calcularlos:

Definición 1. *Un ángulo central es el que tiene su vértice en el centro de un círculo y su valor es igual al arco que intersecta medido en radianes, es decir* $\alpha = \widehat{AB}$[2].

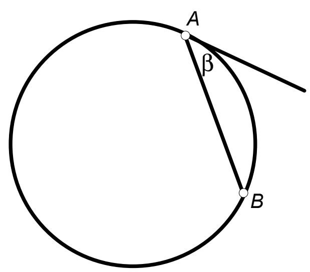


Definición 2. *Un ángulo inscrito es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y su valor es igual a la mitad del arco que intersecta, es decir* $\beta = \frac{\widehat{AB}}{2}$.

[2]Con $\widehat{XY}$ denotamos al arco de la circunferencia entre los puntos X y Y.

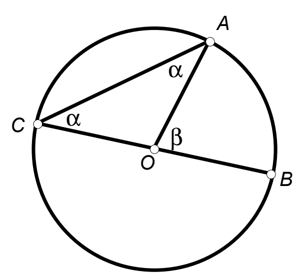


Definición 3. *Un ángulo semi-inscrito es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y está formado por una línea tangente y una secante. Su valor es igual a la mitad del arco que intersecta, es decir* $\beta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.



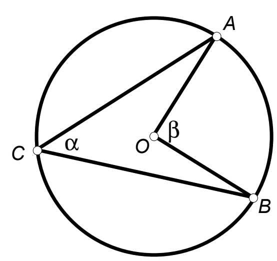
Teorema 2. *El valor de un ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que intersecta el mismo arco.*

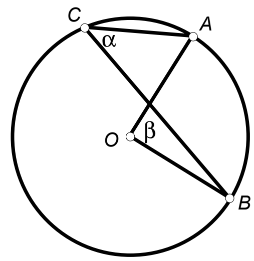
Demostración. Probaremos esto para el caso cuando uno de los lados del ángulo coincide con un diámetro:



En la figura anterior sea CB un diámetro, sean $\measuredangle ACB = \alpha$ (ángulo inscrito) y $\measuredangle AOB = \beta$ (ángulo central). Debemos probar que $\alpha = \frac{\beta}{2}$. Observemos que tanto OA como OC son radios de la circunferencia, entonces el triángulo $\measuredangle AOC$ es isósceles, esto es $\measuredangle ACO = \measuredangle CAO = \alpha$. Utilizando el resultado del ejercicio 1 de la sección 1, tenemos que $\measuredangle AOB = \measuredangle ACO + \measuredangle CAO = \alpha + \alpha = \beta$, por lo tanto $\beta = 2\alpha$. ∎

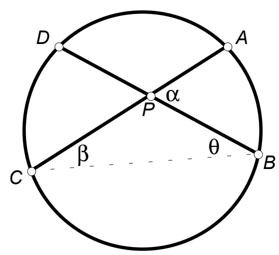
Ahora faltaría demostrar lo anterior para las siguientes figuras, lo cual el lector puede probar fácilmente utilizando el caso que hemos probado.





TEOREMA 3. *La magnitud del ángulo entre dos líneas que se cortan dentro de un círculo es igual a la semisuma de los arcos que cortan dichas líneas. Es decir*

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}.$$



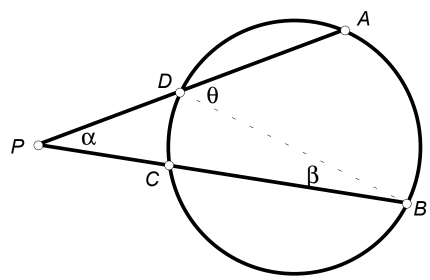
DEMOSTRACIÓN. Se traza el segmento CB formándose así el triángulo $\triangle PCB$. Como $\alpha = \beta + \theta$ tenemos

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}.$$

∎

TEOREMA 4. *La magnitud del ángulo entre dos líneas que se cortan fuera de un círculo es igual a la semidiferencia de los arcos que cortan dichas líneas. Es decir*

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}.$$



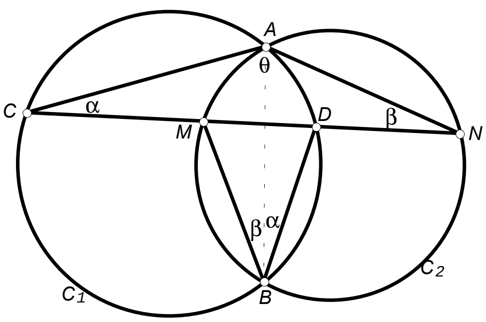
Demostración. Se traza el segmento DB, formándose así el triángulo $\triangle PDB$. Como $\theta = \alpha + \beta$, tenemos que $\alpha = \theta - \beta$, entonces

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}.$$

$\blacksquare$

Ejemplo 1. *Las circunferencias C_1 y C_2 se intersectan en los puntos A y B. Se traza una recta l que corta a C_1 en C y D, y a C_2 en M y N, de tal manera que A y B quedan en distintos lados de l. Demuestra que $\measuredangle CAN + \measuredangle MBD = 180°$.*

Solución 1. *Trazamos la cuerda AB. Tenemos que $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = \alpha$ y $\measuredangle ABM = \measuredangle ANM = \beta$, además, en el triángulo $\triangle ACN$ si hacemos $\measuredangle CAN = \theta$, tenemos que $\alpha + \beta + \theta = 180° = \measuredangle CAN + \measuredangle MBD$.*



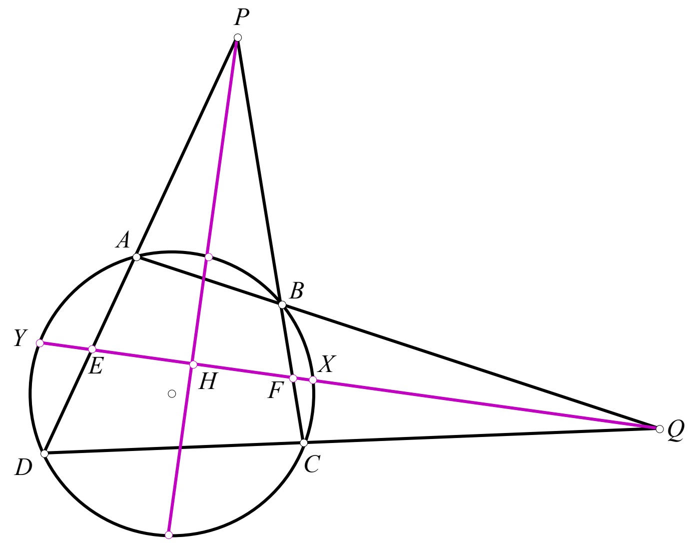
Ejemplo 2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que las líneas AB y DC se intersectan en un punto Q y las líneas DA y CB se intersectan en un punto P. Demuestra que las bisectrices*[3] *de los ángulos $\measuredangle DPC$ y $\measuredangle AQD$ son perpendiculares.*

Solución 2. *Sea H el punto de intersección de las dos bisectrices mencionadas. Sean Y y X los puntos donde la bisectriz del $\measuredangle AQD$ intersecta a la circunferencia y sean E y F los puntos donde esta bisectriz intersecta a los lados AB y BC. Probar que $\measuredangle PHQ = 90°$ es equivalente a probar que el triángulo $\triangle PEF$ es isósceles. Para probar esto utilizaremos una técnica que resulta muy útil al resolver problemas y a la cual denominaremos* ir hacia atrás. *La idea es suponer válido el resultado que queremos demostrar e ir observando que otros resultados también serían válidos. Se hace esto hasta que lleguemos a un resultado el cual sea fácil de demostrar o sea conocido por nosotros de alguna manera. Una vez hecho esto tratamos de regresarnos siguiendo los pasos en orden inverso. Aplicando esta técnica al problema tenemos lo siguiente:*

$\triangle PEF$ *isósceles* $\Longrightarrow \measuredangle PEF = \measuredangle PFE \Longrightarrow \overset{\frown}{DY} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BX} = \overset{\frown}{YA} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{XC} \Longrightarrow \overset{\frown}{DY} + \overset{\frown}{BX} = \overset{\frown}{YA} + \overset{\frown}{XC} \Longrightarrow \overset{\frown}{DY} - \overset{\frown}{XC} = \overset{\frown}{YA} - \overset{\frown}{BX}$. *Esto último*

[3] La bisectriz de un ángulo divide a éste en dos ángulos de la misma medida.

es cierto debido a que QY es la bisectriz del ángulo $\measuredangle AQD$. El regreso se lleva a cabo sin dificultad alguna en este caso.



2.1. Ejercicios.

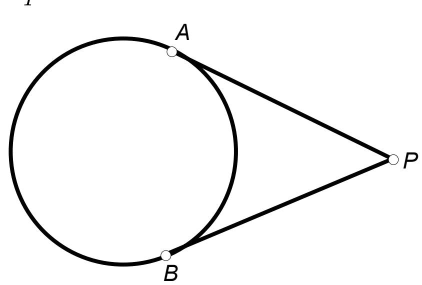
Ejercicio 5. *Demuestra que dos líneas paralelas cualesquiera que intersectan una circunferencia, cortan arcos iguales entre ellas.*

Ejercicio 6. *Demuestra que el valor de un ángulo semi-inscrito es igual al valor de un angulo inscrito que intersecte el mismo arco.*

Ejercicio 7. *Demuestra que el radio trazado hacia el punto de tangencia es perpendicular a la tangente.*

Ejercicio 8. *Una circunferencia ha sido dividida arbitrariamente en cuatro partes, y los puntos medios de los arcos obtenidos se han unido con segmentos de rectas. Demuestra que entre estos segmentos dos serán perpendiculares entre sí.*

Ejercicio 9. *En la siguiente figura PA y PB son tangentes a la circunferencia. Demuestra que $PA = PB$.*



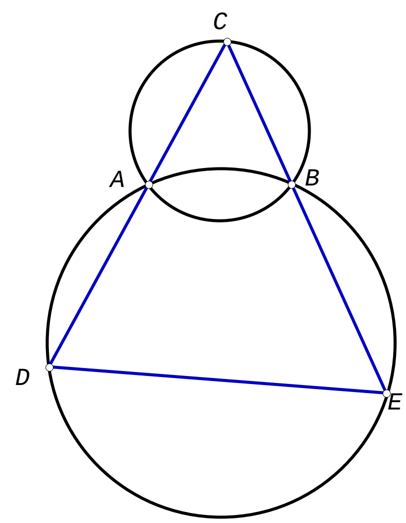
Ejercicio 10. *Dos circunferencias son tangentes exteriormente en un punto A. BC es una tangente común externa. Demuestra que $\measuredangle BAC = 90°$.*

Ejercicio 11. *A una circunferencia se le han trazado dos líneas tangentes paralelas las cuales la tocan en los puntos M y N. Se traza una tercer tangente la cual corta a las tangentes anteriores en los puntos K y L. Sea O el centro de la circunferencia. Demuestra que $\measuredangle KOL = 90°$.*

Ejercicio 12. *Uno de los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia coincide con un diámetro. Demuestra que el triángulo es un triángulo rectángulo.*

Ejercicio 13. *Demuestra que la razón entre la longitud del lado de un triángulo y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*[4]

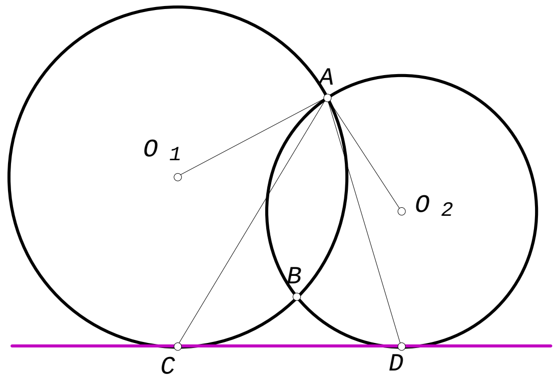
Ejercicio 14. *Dos circunferencias se intersectan en los puntos A y B como se muestra en la figura. Se escoge un punto arbitrario C en la primer circunferencia y se trazan los rayos CA y CB, los cuales intersectan la segunda circunferencia de nuevo en los puntos D y E, respectivamente. Demuestra que la longitud del segmento DE no depende de la elección del punto C.*



Ejercicio 15. *Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se intersectan en los puntos A y B, como se muestra en la figura. La línea CD es tangente a ambas circunferencias. Demuestra que*

$$\measuredangle CAD = \frac{1}{2}\measuredangle O_1AO_2.$$

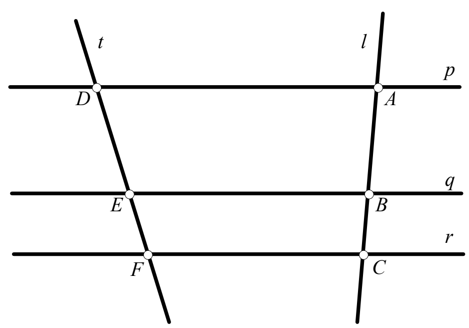
[4]Con ésto hemos probado que $\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC} = 2R$, la cual es conocida como la *Ley de los Senos*.



3. El Teorema de Tales

Teorema 5. *Si una línea transversal corta a tres paralelas y los segmentos que quedan entre éstas se dividen en la razón $m : n$, entonces cualquier otra transversal que corte a estas paralelas también quedará dividida en la razón $m : n$.*

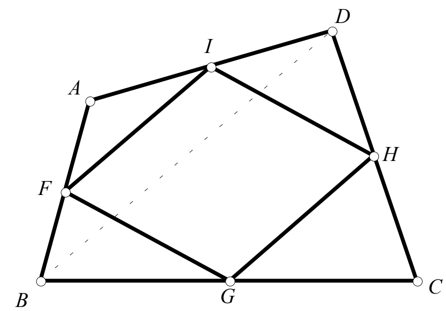
Por ejemplo, sean p, q, r, tres rectas paralelas. Si una línea l corta a las rectas en los puntos A, B y C, de manera tal que $AB : BC = 2 : 1$, y otra línea t corta a las rectas paralelas en D, E y F, también tendremos que $DE : EF = 2 : 1$.



También el recíproco del teorema de Tales es aplicado a triángulos para demostrar segmentos paralelos. Por ejemplo, si en el triángulo $\triangle ABC$ M y N son los puntos medios de los lados AB y AC, tenemos que $AM : NB = AN : NC = 1 : 1$, y por el teorema de Tales decimos que MN es paralelo a BC.

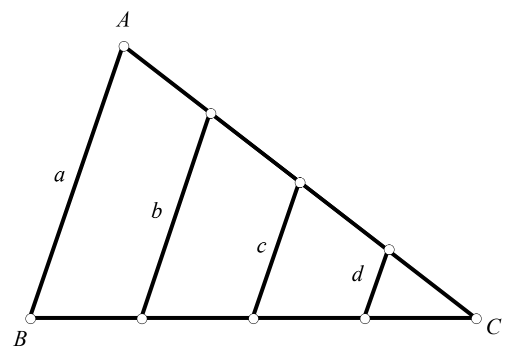
Ejemplo 3. *Sean F, G, H e I los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Demuestra que el cuadrilátero $FGHI$ es un paralelogramo.*

Solución 3. *Tracemos la diagonal BD. Como F e I son los puntos medios de AB y AD respectivamente, tenemos que FI es paralelo a BD; también, como G y H son los puntos medios de BC y CD, entonces GH es paralelo a BD, de aquí tenemos que FI es paralelo a GH. Análogamente* *podemos demostrar que FG es paralelo a IH. Como el cuadrilátero $FGHI$ tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos, entonces es un paralelogramo.*



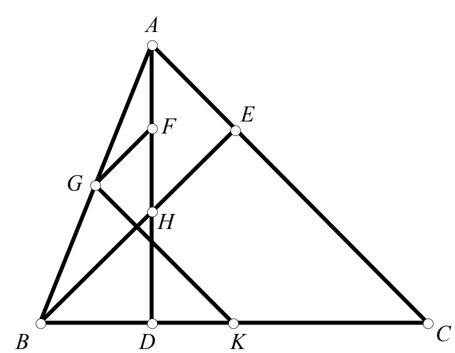
3.1. Ejercicios.

Ejercicio 16. *En la siguiente figura los segmentos a, b, c y d son paralelos y dividen al lado BC en 4 segmentos iguales. Si $a = 10$, encuentra la suma $a + b + c + d$.*



Ejercicio 17. *Sea $ABCD$ un paralelogramo en el que L y M son puntos medios de AB y CD, respectivamente. Demuestra que los segmentos LC y AM dividen la diagonal BD en tres segmentos iguales.*

Ejercicio 18. *En la siguiente figura, BE y AD son alturas del $\triangle ABC$. F, G y K son puntos medios de AH, AB, y BC, respectivamente. Demuestra que $\measuredangle FGK$ es un ángulo recto.*



Ejercicio 19. *Demuestra que las diagonales en un paralelogramo se cortan en su punto medio.*

Ejercicio 20. *Sea AM la mediana trazada hacia el lado BC de un triángulo $\triangle ABC$. Prolongamos AM más allá del punto M y tomamos un punto N de tal manera que AN es el doble de AM. Demuestra que el cuadrilátero $ABNC$ es un paralelogramo.*

Ejercicio 21. *Demuestra que el segmento de línea, que une los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero, bisecta el segmento de línea que une los puntos medios de las diagonales.*

Ejercicio 22. *En un paralelogramo $ABCD$ se escogen los puntos E y F sobre la diagonal AC de manera que $AE = FC$. Si BE se extiende hasta intersectar AD en H, y BF se extiende hasta intersectar DC en G, Demuestra que HG es paralelo a AC.*

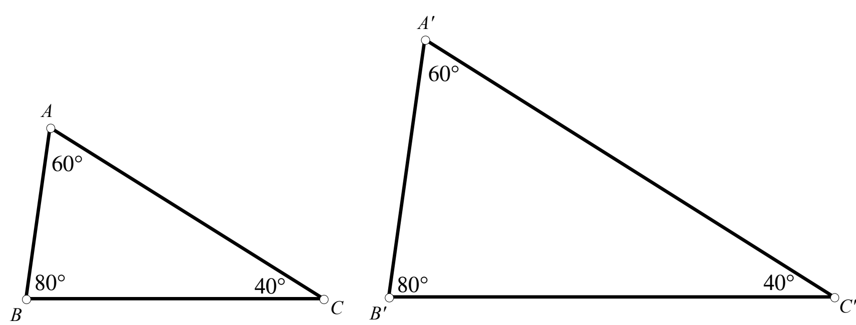
Ejercicio 23. *AM es la mediana hacia el lado BC de un triángulo $\triangle ABC$. Se toma un punto P sobre AM. BP se extiende hasta intersectar AC en E, y CP se extiende hasta intersectar AB en D. Demuestra que DE es paralelo a BC.*

Ejercicio 24. *Sobre los lados AB y AC de un triángulo $\triangle ABC$ se construyen hacia afuera los cuadrados $ABNM$ y $CAPQ$. Sea D el punto medio del lado BC. Demuestra que $PM = 2 \cdot AD$.*

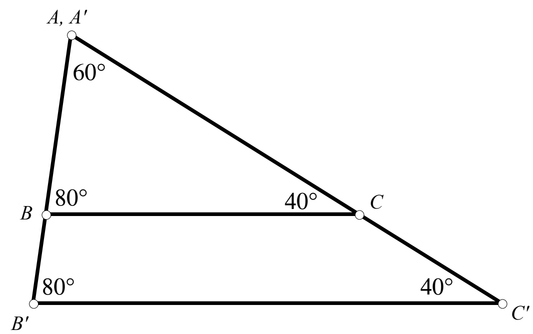
4. Triángulos semejantes

Definición 4. *Se dice que dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma (aunque no necesariamente el mismo tamaño), es decir, si tienen sus tres ángulos iguales.*

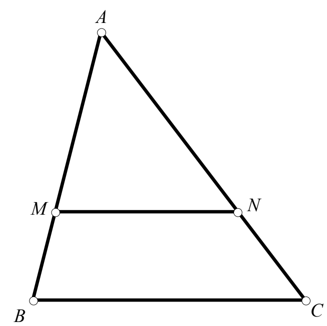
Por ejemplo, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes:



Si nosotros movemos el triángulo $\triangle ABC$ hasta que el vértice A concida con el vérticeA', y además lo hacemos de tal manera que el lado AB quede exactamente encima del lado $A'B'$, tendremos la siguiente figura:



Aquí podemos observar que los lados BC y $B'C'$ son paralelos, y de manera inversa, si nosotros trazamos una línea paralela a uno de los lados de un triángulo de manera que ésta corte a los dos lados restantes, entonces esta línea paralela cortará un triángulo semejante al triángulo original.



Utilizando lo anterior y el teorema de Tales, tenemos las siguiente proporción:

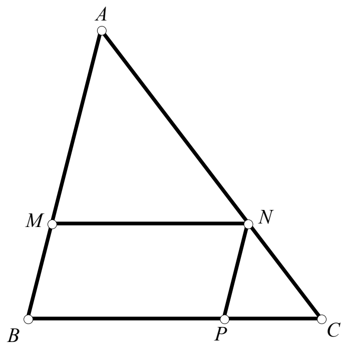
$$\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{NA},$$

sumando 1 en ambos lados tenemos

$$\frac{BM}{MA} + 1 = \frac{CN}{NA} + 1 \Longrightarrow \frac{BM + MA}{MA} = \frac{CN + NA}{NA} \Longrightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN},$$

además, si trazamos una paralela a AB la cual pase por el punto N, tendremos el paralelogramo[5] $MNPB$:

[5]Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que cada par de lados opuestos son paralelos y de la misma longitud.



utilizando nuevamente el teorema de Tales tenemos que

$$\frac{CP}{PB} = \frac{CN}{NA}.$$

Nuevamente sumamos 1 en ambos lados y obtenemos que

$$\frac{CB}{PB} = \frac{CA}{NA},$$

pero como $PB = NM$ tenemos que

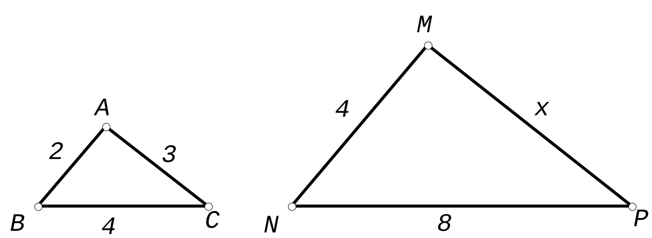
$$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN}.$$

Juntando los resultados anteriores tenemos que

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN},$$

es decir, si dos triángulos son semejantes entonces sus lados son proporcionales.
Veamos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 4. *Tenemos dos triángulos semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$. Sabemos que sus lados son iguales a los valores marcados en la siguiente figura, encuentra cuánto vale x.*

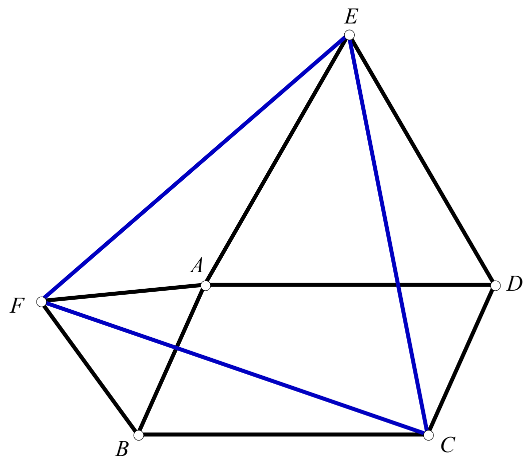


SOLUCIÓN 4. *Como tenemos que los lados de ambos triángulos son proporcionales, entonces:*

$$\frac{x}{3} = \frac{8}{4}$$

con esto llegamos a que el valor de x es 6.

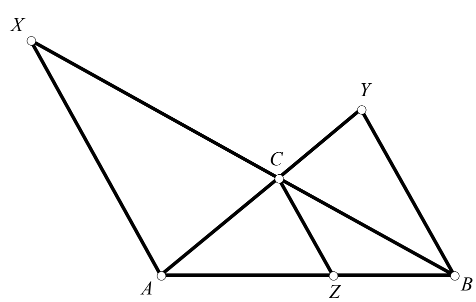
Ejemplo 5. *En la siguiente figura, $ABCD$ es un paralelogramo. Sobre los lados AB y AD se dibujan los triángulos equiláteros $\triangle ABF$ y $\triangle ADE$, respectivamente. Demuestra que el triángulo $\triangle FCE$ es equilátero.*



Solución 5. *Cuando dos triángulos, además de ser semejantes, tienen las longitudes de sus lados iguales se dice que son congruentes. En la figura anterior, tenemos que $\measuredangle FAE + 120° + \measuredangle BAD = 360°$, entonces $\measuredangle FAE = 240° - \measuredangle BAD = 180° - \measuredangle BAD + 60°$ y como $\measuredangle FBC = 180° - \measuredangle BAD + 60°$ entonces $\measuredangle FAE = \measuredangle FBC$. Además, tenemos que $FA = FB$ y $AE = BC$, esto implica que el triángulo $\triangle FAE$ es congruente al triángulo $\triangle FBC$ y por lo tanto $FE = FC$. De manera análoga podemos demostrar que $EC = FE$ y así concluimos que el triángulo $\triangle FEC$ es equilátero.*

Ejemplo 6. *En un triángulo $\triangle ABC$, Z es un punto sobre la base AB. Una línea a través de A paralela a CZ intersecta BC en X. Una línea a través de B paralela a CZ intersecta AC en Y. Demuestra que*

$$\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}.$$



Solución 6. *Primero reescribimos la expresión que queremos demostrar como*

$$1 = \frac{CZ}{AX} + \frac{CZ}{BY}.$$

Tenemos que el triángulo $\triangle BCZ$ *es semejante al triángulo* $\triangle BXA$, *de aquí obtenemos*

$$\frac{CZ}{AX} = \frac{BZ}{AB}.$$

De manera análoga, de la semejanza entre los triángulos $\triangle ACZ$ *y* $\triangle AYB$, *tenemos que*

$$\frac{CZ}{BY} = \frac{AZ}{AB}.$$

Sumando estas dos expresiones que hemos obtenido tenemos que

$$\frac{CZ}{AX} + \frac{CZ}{BY} = \frac{BZ}{AB} + \frac{AZ}{AB} = \frac{AZ + ZB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1.$$

Ejemplo 7. *Dado un triángulo* $\triangle ABC$, *sea* l *una línea que pasa por el vértice* A *la cual divide el ángulo* $\measuredangle BAC$ *en dos partes iguales. Sean* P *y* Q *las proyecciones desde* B *y* C *sobre* l, *y sea* D *un punto sobre la línea* BC *de tal manera que* DA *es perpendicular a* l. *Demuestra que* AD, BQ *y* CP *concurren.*

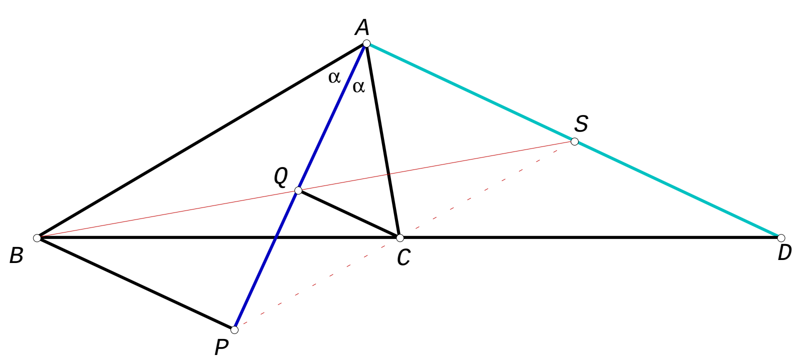
Solución 7. *Sea* S *el punto donde la línea* BQ *intersecta a* AD. *Como* AD, CQ *y* BP *son paralelas, tenemos que*

$$\frac{SQ}{SB} = \frac{AQ}{AP}.$$

Además, como los triángulos $\triangle ABP$ *y* $\triangle ACQ$ *son semejantes, tenemos que*

$$\frac{QC}{BP} = \frac{AQ}{AP},$$

de aquí obtenemos que los triángulos $\triangle SQC$ *y* $\triangle SBP$ *son semejantes y comparten el vértice* S, *por lo tanto,* P, C *y* S *son colineales.*

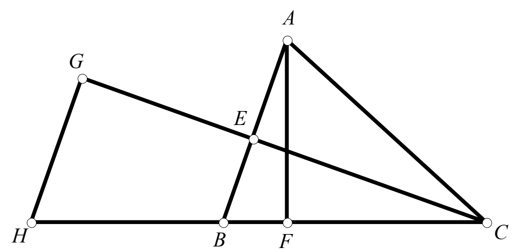


4.1. Ejercicios.

Ejercicio 25. *Demuestra que la recta que une los puntos medios de los lados paralelos de un trapecio pasa por el punto de intersección de las diagonales.*

Ejercicio 26. *En un triángulo $\triangle ABC$, sobre el lado BC se toma un punto D de tal manera que $\measuredangle BAD = \measuredangle ACB$. Demuestra que $AB^2 = BD \cdot BC$.*

Ejercicio 27. *En un triángulo $\triangle ABC$, la altura CE es extendida hasta G de tal manera que $EG = AF$, donde AF es la altura trazada hacia BC. Una línea a través de G y paralela a AB intersecta CB en H. Demuestra que $HB = AB$.*

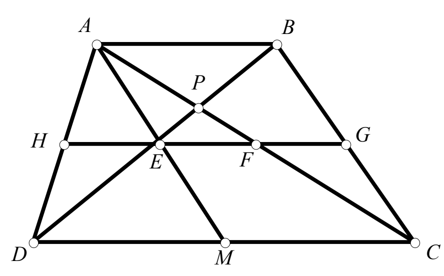


Ejercicio 28. *En un trapecio $ABCD$ (AB paralelo a DC) sea $AB = a$ y $DC = b$. Sean M, N, P y Q los puntos medios de AD, BD, AC y BC repectivamente. Demuestra que*
a) $MQ = \frac{a+b}{2}$
b) $NP = \frac{|a-b|}{2}$

Ejercicio 29. *En un trapecio $ABCD$ (AB paralelo a DC) sea $AB = a$ y $DC = b$. Sabemos que $\measuredangle ADC + \measuredangle BCD = 90°$. Sean M, y N los puntos medios de AB y DC. Demuestra que*

$$MN = \frac{b-a}{2}.$$

Ejercicio 30. *En un trapecio $ABCD$ (AB paralelo a DC), las diagonales se intersectan en P, AM es una mediana del triángulo $\triangle ADC$, la cual intersecta BD en E. A través de E, se traza una línea paralela a DC la cual corta a AD, AC y BC en los puntos H, F y G, respectivamente. Demuestra que $HE = EF = FG$.*



Ejercicio 31. *Demuestra que las rectas que unen los centros de los cuadrados, construidos exteriormente sobre los lados de un paralelogramo, forman también un cuadrado.*

Ejercicio 32. *Expresa el lado de un decágono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita a éste.*

Ejercicio 33. *Dos circunferencias se intersectan en los puntos A y B. Por el punto A se han trazado los segmentos AC y AD, cada uno de los cuales, siendo cuerda de una circunferencia, es tangente a la segunda circunferencia. Demuestra que $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot DC$.*

Ejercicio 34. *Sea M el punto medio de la base AC de un triángulo isósceles $\triangle ABC$. H es un punto en BC tal que MH es perpendicular a BC. P es el punto medio del segmento MH. Demuestra que AH es perpendicular a BP.*

Ejercicio 35. *Se da un triángulo $\triangle ABC$. En la recta que pasa por el vértice A y es perpendicular al lado BC, se toman dos puntos A_1 y A_2 de modo que $AA_1 = AA_2 = BC$ (A_1 es más próximo a la recta BC que A_2). De manera análoga, en la recta perpendicular a AC, que pasa por B, se toman los puntos B_1 y B_2 de modo que $BB_1 = BB_2 = AC$. Demuestra que los segmentos A_1B_2 y A_2B_1 son iguales y mutuamente perpendiculares.*

Ejercicio 36. *Por el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero $ABCD$ se traza una recta que corta a AB en el punto M y a CD en el punto N. Por M y N se trazan las rectas paralelas a CD y AB, respectivamente, que cortan a AC y a BD en los puntos E y F. Demuestra que BE es paralelo a CF.*

Ejercicio 37. *En un cuadrilátero $ABCD$. Sobre las rectas AC y BD se toman los puntos K y M de manera que BK es paralelo a AD y AM es paralelo a BC. Demuestra que KM es paralelo a CD.*

Ejercicio 38. *Sea E un punto arbitrario sobre el lado AC del triángulo $\triangle ABC$. Por el vértice B tracemos una recta arbitraria l. Por E, se traza una recta paralela a BC la cual corta l en el punto N. También por E, se traza una recta paralela a AB la cual corta l en el punto M. Demuestra que AN es paralelo a CM.*

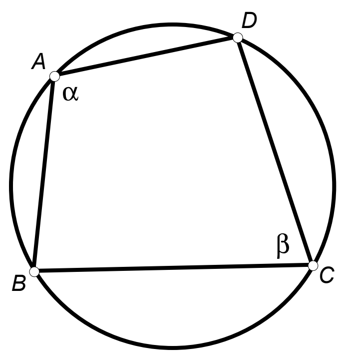
Ejercicio 39. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero y sea Γ el semicírculo que tiene a BC como diámetro y que es exterior al triángulo. Mostrar que si una línea que pasa por A trisecta a BC, entonces también trisecta al arco Γ.*

5. Cuadriláteros cíclicos.

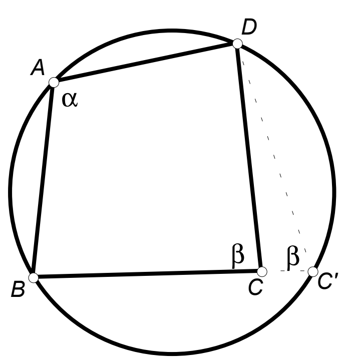
Definición 5. *Un cuadrilátero que está inscrito en una circunferencia, es decir, sus cuatro vértices están sobre una circunferencia se dice que es un cuadrilátero cíclico.*

Teorema 6. *Una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea cíclico es que la suma de dos ángulos opuestos sea igual a 180°.*

Demostración. Para probar esto, primero vamos a suponer que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Tenemos que el $\measuredangle DAB = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$ y $\measuredangle BCD = \frac{\overset{\frown}{DB}}{2}$, y como $\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DB} = 360°$ (midiendo los ángulos en grados) tenemos que $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = \alpha + \beta = 180°$.



Ahora supongamos que $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = \alpha + \beta = 180°$. Tracemos la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle DAB$ y supongamos que ésta no pasa por el vértice C. Prolonguemos DC hasta que intersecte a la circunferencia en C'. Como el cuadrilátero $ABC'D$ es cíclico tenemos que $\measuredangle DAB + \measuredangle BC'D = 180°$, esto quiere decir que $\measuredangle BC'D = \measuredangle BCD = \beta$ y entonces DC sería paralelo a DC', lo cual es una contradicción ya que líneas paralelas no se intersectan. Entonces C coincide con C' y por lo tanto el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

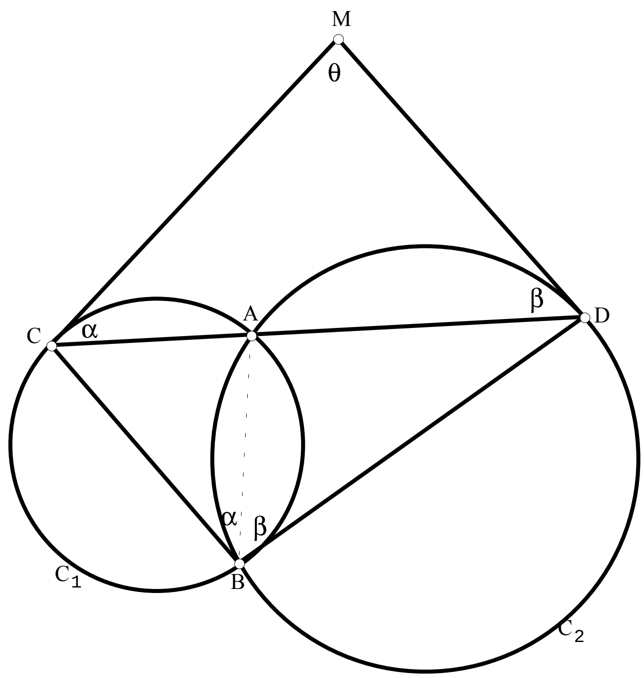


∎

Ahora vamos a hacer un ejemplo donde utilicemos el teorema anterior:

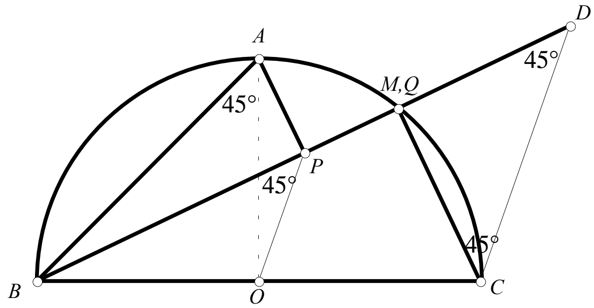
Ejemplo 8. *Las circunferencias C_1 y C_2 se intersectan en los puntos A y B. Por el punto A se traza una recta que corta a las circunferencias C_1 y C_2 en los puntos C y D, respectivamente. Por los puntos C y D se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se intersectan en el punto M. Demuestra que el cuadrilátero $MCBD$ es cíclico.*

Solución 8. *Queremos probar que $\measuredangle CMD + \measuredangle DBC = 180°$. Tracemos la cuerda común AB. Tenemos que $\measuredangle MCA = \measuredangle CBA = \alpha$ ya que uno es ángulo seminscrito y el otro es ángulo inscrito, ambos en la circunferencia C_1. Análogamente se demuestra que $\measuredangle MDA = \measuredangle DBA = \beta$ (en C_2). Tenemos que $\alpha + \beta + \theta = 180°$, por ser los ángulos internos del triángulo $\triangle MCD$, pero como $\measuredangle CBD = \alpha + \beta$ tenemos que $\measuredangle CMD + \measuredangle DBC = 180°$.*

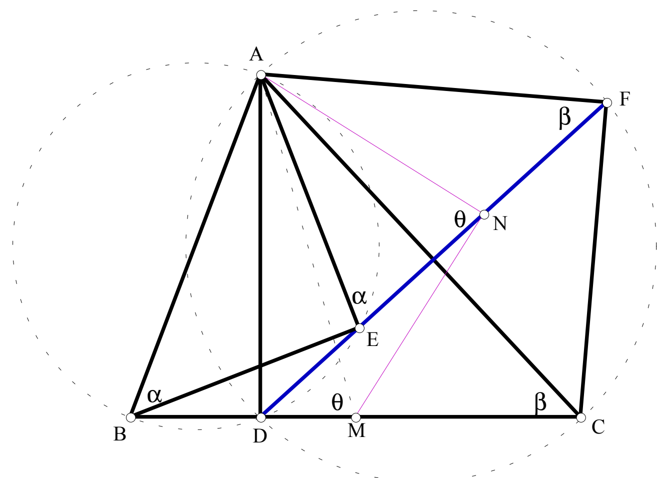


Ejemplo 9. *Sea BC el diámetro de un semicírculo y sea A el punto medio del semicírculo. Sea M un punto sobre el segmento AC. Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde A y C a la línea BM, respectivamente. Demuestra que $BP = PQ + QC$.*

Solución 9. *Tomamos el punto D sobre el rayo BP de tal manera que $QD = QC$, entonces $PD = PQ + QD = PQ + QC$. Bastará entonces probar que P es el punto medio de BD. Primero, tenemos que Q y M coinciden, entonces $\measuredangle QDC = \measuredangle QCD = 45°$, y como O es el punto medio de BC ahora tendremos que demostrar que OP es paralelo a DC. Para esto, bastará demostrar que $\measuredangle BPO = 45°$. Como $AO \perp BC$ y $\measuredangle APB = 90°$ tenemos que $APOB$ es cíclico y de aqui que $\measuredangle BPO = \measuredangle BAO = 45°$, por lo tanto $BP = PQ + QC$.*



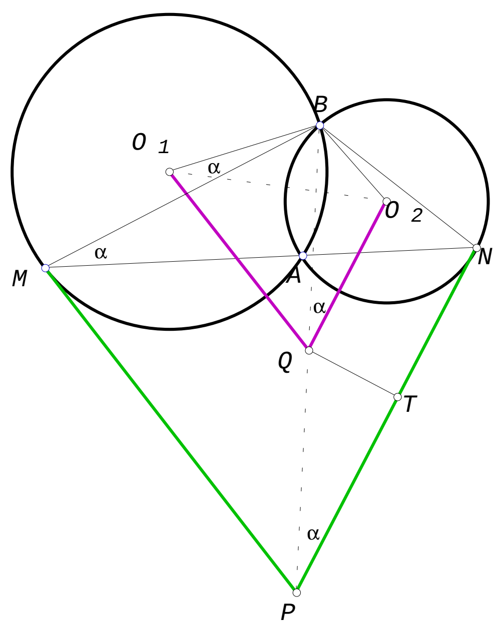
Ejemplo 10. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo y sea D el pie de la altura desde A. Sean E y F sobre una línea que pasa por D de tal manera que AE es perpendicular a BE, AF es perpendicular a CF, E y F son diferentes de D. Sean M y N los puntos medios de BC y EF, respectivamente. Demuestra que AN es perpendicular a NM.*



Solución 10. *Tenemos que E está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABD$ y F está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ADC$, entonces los cuadriláteros $ABDE$ y $ADCF$ son cíclicos. De lo anterior tenemos que $\measuredangle ABD = \measuredangle AEF = \alpha$ y $\measuredangle ACD = \measuredangle AFE = \beta$ lo cual implica que $\triangle ABC \sim \triangle AEF$. Tanto M como N son puntos medios de los lados correspondientes BC y EF, respectivamente, y esto implica que $\measuredangle AMB = \measuredangle ANE = \measuredangle AND = \theta$, es decir, el cuadrilátero $ADMN$ es cíclico y por lo tanto $\measuredangle ANM = 90°$.*

Ejemplo 11. *Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se intersectan en los puntos A y B como se muestra en la figura. Por A se traza una recta l que intersecta de nuevo a las circunferencias en los puntos M y N. Por M y N se trazan las líneas tangentes respectivas y éstas se intersectan en el punto P. La paralela a PN por O_2 y la paralela a PM por O_1 se intersectan en Q. Demuestra que las rectas PQ, al variar la recta l, pasan por un punto fijo y que la longitud del segmento PQ es constante.*

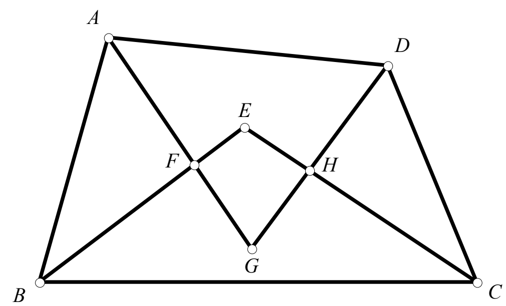
Solución 11. *Como vimos en el ejemplo 8, el cuadrilátero $BMPN$ es cíclico. Entonces $\measuredangle BPN = \measuredangle BMN = \alpha$. Por otro lado, tenemos que $\measuredangle BO_1O_2 = \measuredangle BMN$ y $\measuredangle BO_2O_1 = \measuredangle BNM$, lo cual implica que $\measuredangle O_1BO_2 = \measuredangle MBN$ Con esto hemos probado que el cuadrilátero BO_1QO_2 es cíclico. De aquí obtenemos que $\measuredangle BQO_2 = \measuredangle BO_1O_2 = \measuredangle BMN = \alpha$, lo cual implica que B, Q y P están alineados. De no ser así, tendríamos que BP intersectaría a la línea QO_2 en un punto Q' distinto de Q, pero entonces también tendríamos que $\measuredangle BQ'O_2 = \measuredangle BPN = \measuredangle BQO_2 = \alpha$, lo que a su vez implicaría que los puntos B, O_1, Q, Q' y O_2 son concíclicos. Esto es una contradicción, por lo tanto, B, Q y P están alineados.*
Para la segunda parte consideramos la proyección de Q sobre PN y la llamamos T. Sabemos que el ángulo $\measuredangle BMA = \alpha$ no depende de la elección de la recta l, entonces, como la longitud del segmento QT es igual al radio de la circunferencia de centro O_2 y $\measuredangle QPT = \alpha$, tenemos que los triángulos $\triangle QPT$ siempre son congruentes. Por lo tanto, la longitud del segmento PQ no depende de la elección de la línea l.



5.1. Ejercicios.

Ejercicio 40. *En la siguiente figura están trazadas las bisectrices[6] de los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$, las cuales se intersectan en los puntos E, F, G y H, como se muestra en la figura. Demuestra que el cuadrilátero $EFGH$ es cíclico.*

[6] La *bisectriz* de un ángulo es la línea que pasa por el vértice y lo divide en dos ángulos iguales.



Ejercicio 41. *En un triángulo* $\triangle ABC$ *sean* M, N *y* P, *puntos sobre los lados* BC, CA *y* AB, *respectivamente. Se trazan las circunferencias circunscritas a los triángulos* $\triangle APN$, $\triangle BMP$ *y* $\triangle CNM$. *Demuestra que las tres circunferencias tienen un punto en común.*[7]

Ejercicio 42. *Por uno de los puntos* C *del arco* $\overset{\frown}{AB}$ *de una circunferencia se han trazado dos rectas arbitrarias que cortan la cuerda* AB *en los puntos* D *y* E *y a la circunferencia, en los puntos* F *y* G. *¿Para cuál posición del punto* C *en el arco* $\overset{\frown}{AB}$, *al cuadrilátero* $DEGF$ *se le puede circunscribir una circunferencia?*

Ejercicio 43. *Una línea* PQ, *paralela al lado* BC *de un triángulo* $\triangle ABC$, *corta a* AB *y a* AC *en* P *y* Q, *respectivamente. La circunferencia que pasa por* P *y es tangente a* AC *en* Q *corta de nuevo a* AB *en* R. *Demuestra que el cuadrilátero* $RQCB$ *es cíclico.*

Ejercicio 44. *Se toma un punto* P *en el interior de un rectángulo* $ABCD$ *de tal manera que* $\measuredangle APD + \measuredangle BPC = 180°$. *Encuentra la suma de los ángulos* $\measuredangle DAP$ *y* $\measuredangle BCP$.

Ejercicio 45. *Sobre los lados de un cuadrilátero convexo hacia el exterior están construidos cuadrados. Las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares. Demuestra que los segmentos que unen los centros de los cuadrados opuestos, pasan por el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero.*

Ejercicio 46. *En un cuadrado* $ABCD$, M *es el punto medio de* AB. *Una línea perpendicular a* MC *por* M *intersecta* AD *en* K. *Demuestra que* $\measuredangle BCM = \measuredangle KCM$.

Ejercicio 47. *Sea* $ABCD$ *un cuadrilátero cíclico, sea* M *el punto de intersección de las diagonales de* $ABCD$, *y sean* E, F, G *y* H *los pies de las perpendiculares desde* M *hacia los lados* AB, BC, CD *y* DA, *respectivamente. Determina el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero* $EFGH$.

[7]Este resultado es conocido como el *teorema de Miquel*.

EJERCICIO 48. *Sea AB el diámetro de un círculo con centro O. Se toma el punto C sobre la circunferencia de tal manera que OC es perpendicular a AB. Sea P un punto sobre el arco CB. Las líneas CP y AB se intersectan en Q. Se escoge un punto R sobre la línea AP de tal manera que RQ y AB son perpendiculares. Demuestra que $BQ = QR$.*

EJERCICIO 49. *Demuestra que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la perpendicular trazada hacia un lado desde el punto de intersección de las diagonales bisecta el lado opuesto.*

EJERCICIO 50. *Demuestra que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la distancia desde el centro de la circunferencia circunscrita hasta un lado es igual a la mitad de la longitud del lado opuesto.*

EJERCICIO 51. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que las diagonales AC y BD son perpendiculares, y sea P su intersección. Demuestra que las reflexiones de P con respecto a AB, BC, CD y DA son concíclicos.*

EJERCICIO 52. *Está dada la circunferencia Ω. Desde un punto exterior P se trazan dos líneas tangentes a Ω las cuales la tocan en A y B. También por P se traza una secante l a Ω. Desde el centro de Ω se traza una recta perpendicular a l la cual corta a Ω en el punto K y a l en C (el segmento BK corta a l). Demuestra que BK bisecta el ángulo $\measuredangle ABC$.*

EJERCICIO 53. *La cuerda CD de un círculo de centro O es perpendicular a su diámetro AB. La cuerda AE bisecta el radio OC. Demuestra que la cuerda DE bisecta la cuerda BC.*

EJERCICIO 54. *Está dados una circunferencia C_1 y un punto P exterior a ésta. Desde P se trazan las tangentes a C_1 las cuales la intersectan en los puntos A y B. También desde P se traza la secante l la cual intersecta a C_1 en los puntos C y D. Por A se traza una línea paralela a l la cual intersecta a C_1, además de en A, en un punto E. Demuestra que EB bisecta la cuerda CD.*

EJERCICIO 55. *Desde un punto sobre la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero $\triangle ABC$ están trazadas rectas paralelas a BC, CA y AB, las cuales cortan CA, AB y BC en los puntos M, N y Q, respectivamente. Demuestra que M, N y Q están alineados.*

EJERCICIO 56. *El $\triangle ABC$ tiene inscrita una circunferencia, cuyo diámetro pasa por el punto de tangencia con el lado BC y corta la cuerda que une los otros dos puntos de tangencia en el punto N. Demuestra que AN parte BC por la mitad.*

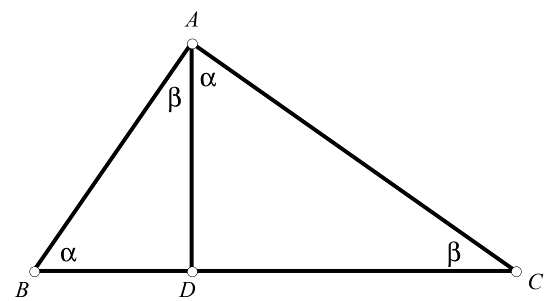
EJERCICIO 57. *Dos circunferencias se intersectan en los puntos A y B. Una recta arbitraria pasa por B y corta por segunda vez la primera circunferencia en el punto C y a la segunda, en el punto D. Las tangentes a la primera circunferencia en C y a la segunda en D se cortan en el punto M.*

Por el punto de intersección de AM y CD pasa una recta paralela a CM, que corta AC en el punto K. Demuestra que KB es tangente a la segunda circunferencia.

Ejercicio 58. *Sean B y C dos puntos de una circunferencia, AB y AC las tangentes desde A. Sea Q un punto del segmento AC y P la intersección de BQ con la circunferencia. La paralela a AB por Q corta a BC en J. Demuestra que PJ es paralelo a AC si y sólo si $BC^2 = AC \cdot QC$.*

6. El Teorema de Pitágoras

Antes de enunciar el *Teorema de Pitágoras* vamos a analizar un triángulo rectángulo el cual tiene trazada la altura hacia la hipotenusa.



Sea $\triangle ABC$ el triángulo mencionado el cual tiene trazada la altura AD y con ángulo recto en A. Sean $\measuredangle ABC = \alpha$ y $\measuredangle ACB = \beta$. Tenemos que $\alpha+\beta = 90°$, entonces también $\measuredangle DAC = \alpha$ y $\measuredangle BAD = \beta$. Así de ésta manera hemos obtenido dos triángulo semejantes al $\triangle ABC$, es decir, $\triangle BAD$ y $\triangle DAC$ son semejantes al triángulo $\triangle ABC$. De la semejanza entre $\triangle BAD$ y $\triangle DAC$ obtenemos:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$$

de aquí obtenemos que

$$AD^2 = BD \cdot DC,$$

y se dice que AD es la *media geométrica* o *media proporcional* de BD y DC. Además, de manera análoga podemos obtener también que

$$AB^2 = BD \cdot BC \tag{1}$$

(de la semejanza de los triángulos $\triangle BAD$ y $\triangle ABC$) y que

$$AC^2 = DC \cdot BC \tag{2}$$

(de la semejanza de los triángulos $\triangle DAC$ y $\triangle ABC$).
Sumando (1) y (2) tenemos que

$$AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC,$$

esto es

$$AB^2 + AC^2 = BC(BD + DC) = BC \cdot BC,$$

es decir

$$AB^2 + AC^2 = BC^2. \tag{3}$$

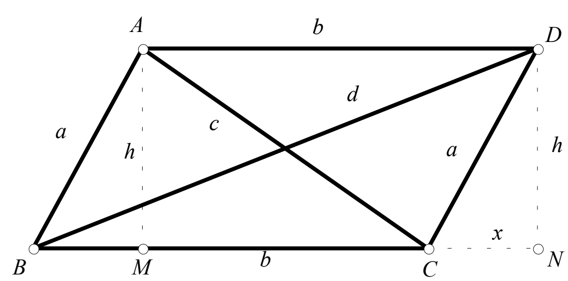
Con esto hemos probado el teorema de Pitágoras.

TEOREMA 7 (Teorema de Pitágoras). *La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo, es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

Este teorema es atribuido a uno de los más grandes matemáticos de la antigua Grecia, Pitágoras, y será de gran utilidad en muchos de los problemas que veremos más adelante. El recíproco también es cierto, pero esto se deja como ejercicio.

TEOREMA 8. *Probar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el paralelogramo y sean $AB = CD = a$ y $BC = DA = b$. También sean $AC = c$ y $BD = d$.



Tracemos perpendiculares a BC desde A y D, las cuales intersectan a BC en M y N. Sea $AM = DN = h$. Tenemos que $BM = CN = x$. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos $\triangle DCN$, $\triangle DBN$, $\triangle AMC$ tenemos las siguientes igualdades:

$$h^2 + x^2 = a^2 \tag{4}$$

$$h^2 + (b + x)^2 = d^2 \tag{5}$$

$$h^2 + (b - x)^2 = c^2 \tag{6}$$

sumando (5) y (6) obtenemos

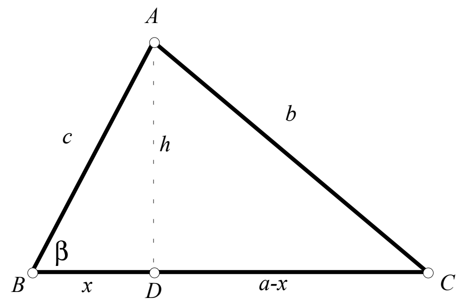
$$2h^2 + 2b^2 + 2x^2 = d^2 + c^2$$

ahora utilizando (4) tenemos que

$$2a^2 + 2b^2 = d^2 + c^2. \tag{7}$$

Lo cual queríamos demostrar. ∎

EJEMPLO 12. *En el triángulo $\triangle ABC$, sean $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ y $\measuredangle ABC = \beta$. Demuestra que $b^2 = a^2 + c^2 - 2acCos\beta$.*



SOLUCIÓN 12. *Sea $AD = h$ la altura trazada hacia el lado BC y sea $BD = x$. Tenemos que*

$$h^2 + x^2 = c^2$$

y

$$h^2 + (a - x)^2 = b^2$$

esto implica que

$$c^2 - x^2 + a^2 + x^2 - 2ax = c^2 + a^2 - 2ax = b^2$$

y como $x = cCos\beta$, tenemos que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCos\beta.$$

La fórmula anterior es conocida como la *Ley de los Cosenos.*

6.1. Ejercicios.

EJERCICIO 59. *Probar el inverso del teorema de Pitágoras: si a, b y c son los lados de un triángulo que cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces es un triángulo rectángulo.*

EJERCICIO 60. *Sean a, b los catetos de un triángulo rectángulo, c la hipotenusa y h la altura trazada hacia la hipotenusa. Demuestra que el triángulo con lados h, $c + h$ y $a + b$ es un triángulo rectángulo.*

EJERCICIO 61. *Dado un rectángulo $A_1A_2A_3A_4$ y un punto P dentro de éste sabemos que $PA_1 = 4$, $PA_2 = 3$ y $PA_3 = \sqrt{10}$. ¿Cuál es la longitud de PA_4?*

EJERCICIO 62. *En una circunferencia de radio R está trazado un diámetro y sobre éste se toma el punto A a una distancia d de su centro. Hallar el radio de la circunferencia que es tangente al diámetro en el punto A y es tangente interiormente a la circunferencia dada.*

EJERCICIO 63. *K es el punto medio del lado AD del rectángulo $ABCD$. Hallar el ángulo entre BK y la diagonal AC si sabemos que $AD : AB = \sqrt{2}$.*

Ejercicio 64. *En un triángulo$\triangle ABC$, E es un punto sobre la altura AD. Demuestra que*

$$AC^2 - CE^2 = AB^2 - EB^2.$$

Ejercicio 65. *Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares en una circunferencia de radio R. Demuestra que*

$$AC^2 + BD^2 = 4R^2.$$

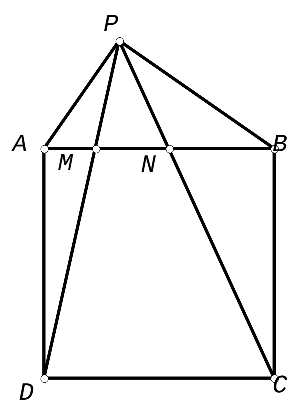
Ejercicio 66. *Un trapecio $ABCD$, con AB paralelo a CD, tiene sus diagonales AC y BD perpendiculares. Demuestra que*

$$AC^2 + BD^2 = (AB + DC)^2.$$

Ejercicio 67. *Demuestra que si en un cuadrilátero la suma de los cuadrados de los lados opuestos son iguales, entonces sus diagonales son perpendiculares entre si.*

Ejercicio 68. *En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado y el triángulo $\triangle ABP$ es rectángulo con ángulo recto en P. Demuestra que*

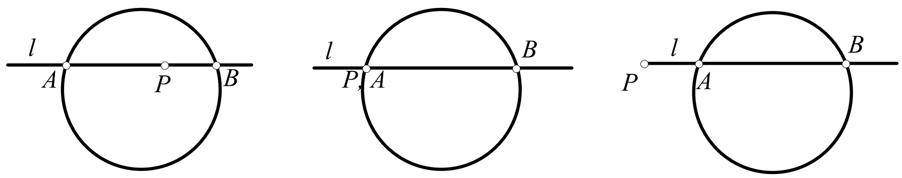
$$MN^2 = AM \cdot BN.$$



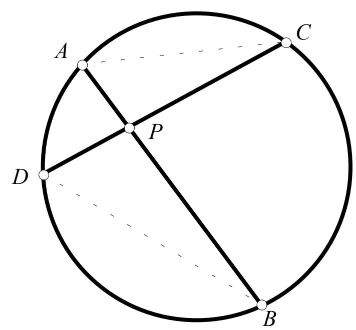
Ejercicio 69. *Sobre un lado de un ángulo recto con vértice en el punto O, se toman dos puntos A y B, siendo $OA = a$ y $OB = b$. Halla el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A y B, a la cual es tangente el otro lado del ángulo.*

7. Potencia de un punto

Están dados un punto fijo P y una circunferencia Ω. Consideremos una línea l que pase por P y las intersecciones A y B de l con Ω. El producto $PA \cdot PB$ es llamado la *potencia de P con respecto a la circunferencia* y no depende de la línea l que hayamos trazado. La potencia de un punto dado P es positiva, cero, ó negativa dependiendo de si el punto se encuentra fuera, sobre, ó dentro de la circunferencia. En los siguientes dos teoremas no nos preocuparemos por el signo de la potencia, sólo analizaremos el valor absoluto de ella.



TEOREMA 9. *La potencia de un punto interior a la circunferencia es constante.*

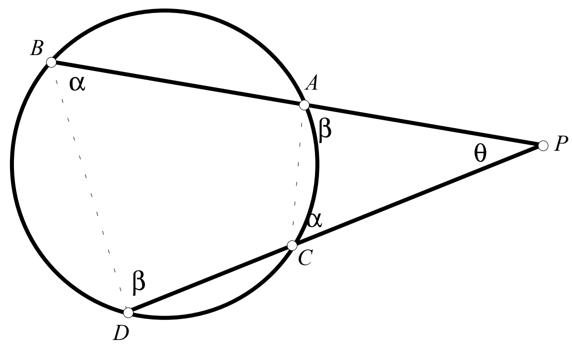


DEMOSTRACIÓN. Sean AB y CD dos cuerdas arbitrarias que pasan por el punto P. Tracemos CA y BD. Tenemos que $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD$ porque ambos son ángulos inscritos que intersectan el mismo arco, análogamente $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$, de aqui que el triángulo $\triangle APC$ es semejante al triángulo $\triangle DPB$ de donde se obtiene que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB} \Longrightarrow AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

lo cual muestra que la potencia es constante para todas las cuerdas que pasen por P. ∎

TEOREMA 10. *La potencia de un punto exterior a la circunferencia es constante.*



DEMOSTRACIÓN. Sean PB y PD dos secantes arbitrarias trazadas desde el punto P, las cuales intersectan a la circunferencia, además de en B y D, en los puntos A y C, como se muestra en la figura. Tracemos CA y BD. Tenemos que $\measuredangle ACP = \measuredangle ABD = \alpha$, ya que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Por la misma razón, $\measuredangle CAP = \measuredangle BDC = \beta$, de aqui que el triángulo $\triangle DPC$ es semejante al triángulo $\triangle DPB$ de donde se obtiene que

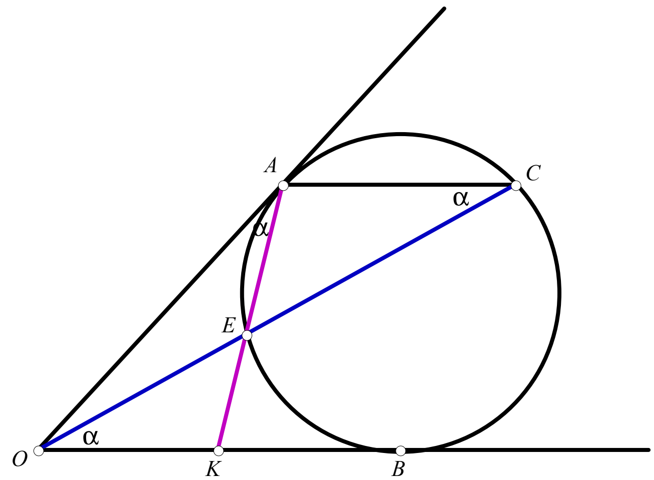
$$\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB} \Longrightarrow AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

lo cual muestra que la potencia es constante para todas las rectas secantes que pasen por P[8]. ∎

EJEMPLO 13. *Está dado un ángulo con vértice O y una circunferencia inscrita en él, la cual toca sus lados en los puntos A y B. Por el punto A se traza una línea paralela a OB la cual intersecta a la circunferencia en el punto C. El segmento OC intersecta la circunferencia en el punto E. Las líneas AE y OB se intersectan en el punto K. Demuestra que $OK = KB$.*

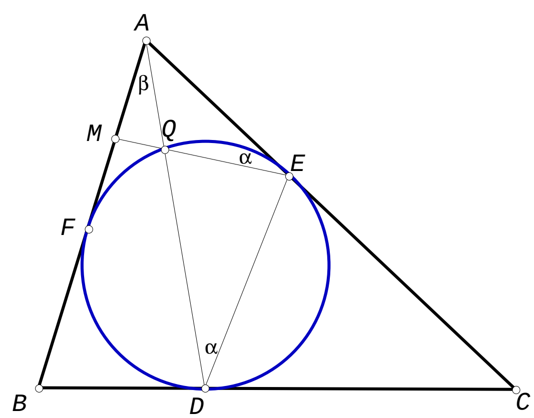
SOLUCIÓN 13. *Demostrar que $OK = KB$ es equivalente a demostrar que $OK^2 = KB^2$, además, como KB^2 es la potencia del punto K a la circunferencia tenemos que $KB^2 = KE \cdot KA$(esto se deja como ejercicio). Solo falta calcular OK^2, y para esto tenemos que $\measuredangle OAK = \measuredangle ACE = \alpha$, ya que ambos ángulos intersectan el arco $\overset{\frown}{EA}$; además $\measuredangle EOK = \measuredangle ACE$, por ser AC y OK paralelos. Tenemos entonces que $\triangle EOK \sim \triangle OAK$ de donde obtenemos que $OK^2 = KE \cdot KA$ y como ya habíamos encontrado que $KB^2 = KE \cdot KA$ tenemos que $OK^2 = KB^2$.*

[8]Falta demostrar que el valor de la potencia se sigue conservando cuando la recta trazada desde P es tangente a la circunferencia, pero ésto se deja como ejercicio.



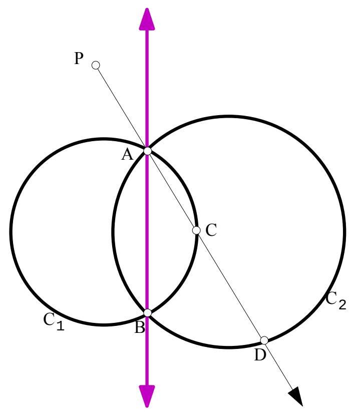
EJEMPLO 14. *La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB es los puntos D, E y F, respectivamente. AD corta la circunferencia en un segundo punto Q. Demuestra que la recta EQ pasa por el punto medio de AF si y sólo si $AC = BC$. (Iberoamericana 1998/2)*

SOLUCIÓN 14. *De manera análoga a la solución del ejemplo anterior, tenemos que M es el punto medio de AF si y sólo si $\measuredangle MAQ = \measuredangle AEM$. Por otro lado, sabemos que $\measuredangle EDQ = \measuredangle AEM$, entonces M será el punto medio de AF si y sólo si $\measuredangle MAQ = \measuredangle EDQ$. Esto es, M es el punto medio de AF si y sólo si $AC = BC$.*



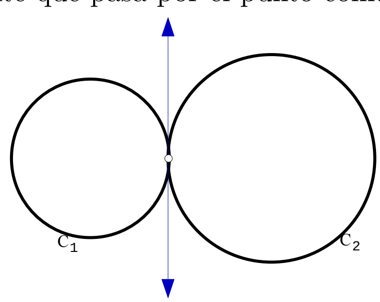
DEFINICIÓN 6 (Eje Radical). *Dadas dos circunferencias, se define el eje radical de éstas, como el lugar geométrico de los puntos para los cuales la potencia hacia las dos circunferencias es igual. Es decir, el eje radical es la línea formada por todos los puntos que tienen igual potencia con respecto a las dos circunferencias.*

Es claro que el eje radical es una línea recta. Consideremos, por ejemplo, el caso cuando las dos circunferencias se cortan en dos puntos:

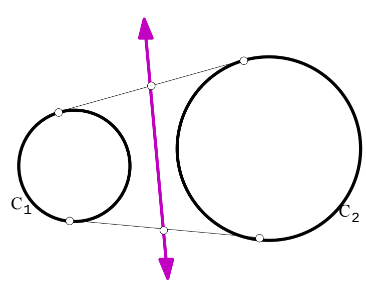


Es muy fácil ver que cualquier punto sobre la línea que pasa por A y B tiene la misma potencia con respecto a las dos circunferencias. Sólo falta ver que no existe ningún punto fuera de la recta el cual tenga la misma potencia con respecto a C_1 y C_2. Supongamos que P tiene la misma potencia con respecto a C_1 y C_2 y consideremos la línea que pasa por P y A. Esta línea intersecta a C_1 y C_2 por segunda vez en C y D,respectivamente. Tenemos que la potencia de P con respecto a C_1 es $PA \cdot PC$ y la potencia de P con respecto a C_2 es $PA \cdot PD$, pero $PC \neq PD$, por lo tanto P no pertenece al eje radical.

Además, si las dos circunferencias son tangentes en un punto entonces el eje radical es la línea tangente que pasa por el punto común:



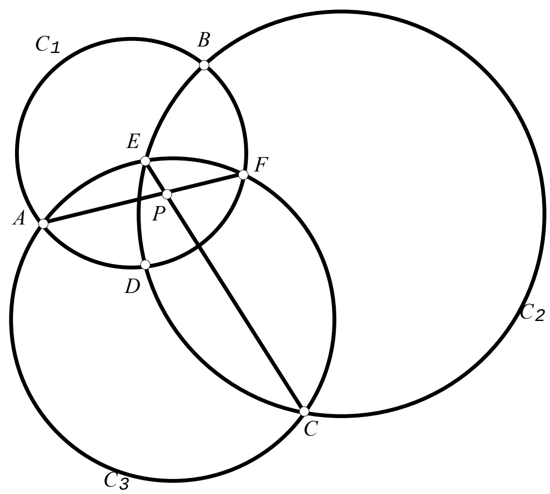
Por otro lado, si las dos circunferencias no se intersectan, podemos probar que el eje radical es la recta que pasa por los puntos medios de las tangentes comunes[9]:



[9]Esto se deja como ejercicio para el lector.

Teorema 11. *Dadas tres circunferencias, los tres ejes radicales (uno por cada par de circunferencias) se intersectan en un punto*[10].

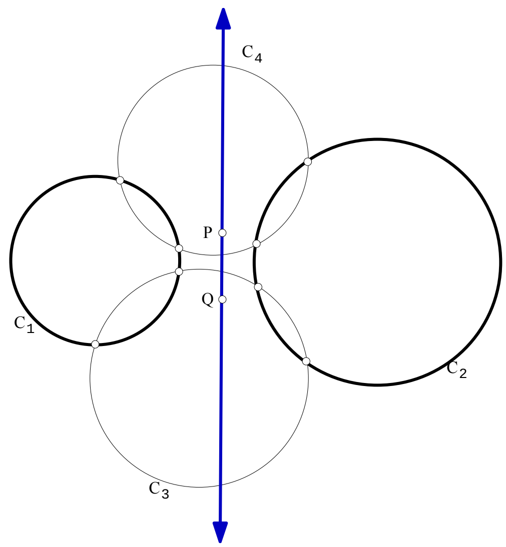
Demostración. Vamos a demostrar el teorema para el caso en el cual las circunferencias se intersectan dos a dos. Sean A, B, C, D, E y F los puntos de intersección de las circunferencias, como se muestra en la siguiente figura.



Sea P el punto de intersección de AF y EC. Como la línea AF es el eje radical de C_1 y C_3 tenemos que P tiene potencia $AP \cdot PF$ con respecto a C_1 y C_3. Análogamente, P tiene potencia $EP \cdot PC$ con respecto a C_2 y C_3. Además, como las cuerdas AF y EC se cortan dentro de la circunferencia C_3 en el punto P, entonces $AP \cdot PF = EP \cdot PC$, esto quiere decir que P tiene la misma potencia con respecto a C_1, C_2, C_3 y por lo tanto pertenece también al eje radical de C_1 y C_2. La demostración para los demás casos es análoga. ∎

Utilizando este teorema podemos dar una manera de construir el eje radical de dos circunferencias que no se intersectan. Por ejemplo, para encontrar el eje radical de C_1 y C_2 trazamos dos circunferencias (C_3 y C_4) cada una de las cuales intersecte a C_1 y C_2. Tenemos que el centro radical de C_1, C_2 y C_3 es P, y el centro radical de C_1, C_2 y C_4 es Q. Como P y Q tienen la misma potencia con respecto a C_1 y C_2 tenemos que el eje radical de C_1 y C_2 es la línea que pasa por P y Q.

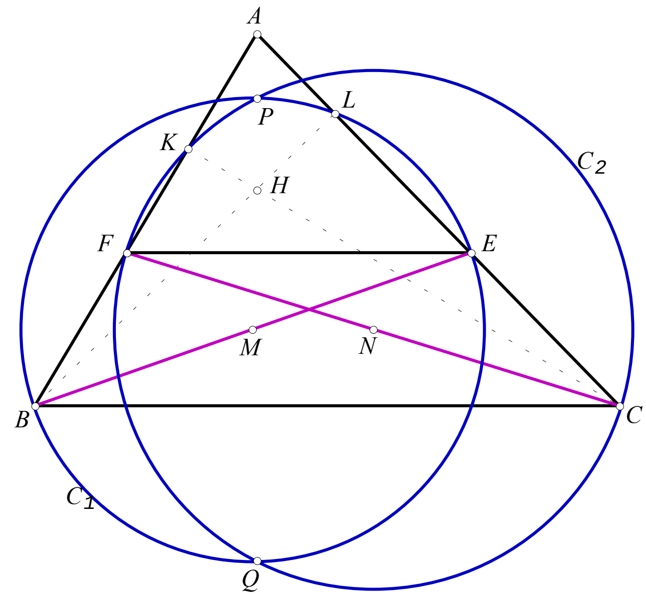
[10]Este punto es llamado el *centro radical* de las circunferencias.



EJEMPLO 15. *Una línea paralela al lado BC de un triángulo $\triangle ABC$ corta a AB en F y a AC en E. Probar que las circunferencias que tienen como diámetros a BE y a CF se cortan en un punto que cae en la altura del triángulo $\triangle ABC$ bajada desde el vértice A.*

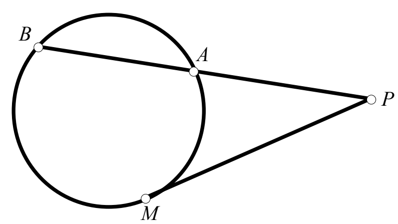
SOLUCIÓN 15. *Denotemos por C_1 y C_2 a las circunferencias de diámetros BE y CF, respectivamente. Sean M y N los centros de C_1 y C_2, y sean P y Q los puntos de intersección de estas circunferencias. Debido a que BE es diámetro de C_1 tenemos que $\angle BLE = 90°$, de la misma manera tenemos que $\angle CKF = 90°$, y con esto tenemos que el cuadrilátero $BKLC$ es cíclico. Como FE es paralelo a BC tenemos que también $FKLE$ es cíclico. Denotemos la circunferencia circunscrita de $FKLE$ por C_3. Tenemos que la línea AC es el eje radical de C_1 y C_3, además, la línea AB es el eje radical de C_2 y C_3. Estos ejes radicales se intersectan en A, entonces el eje radical de C_1 y C_2 debe pasar por el punto A. Por otro lado, sabemos que la línea de los centros de dos circunferencias es perpendicular a su eje radical[11], entonces PQ es perpendicular a MN y por ende a BC. Con esto tenemos que P y Q están contenidos en la altura del triángulo $\triangle ABC$ trazada hacia el lado BC.*

[11] Este resultado se deja como ejercicio.

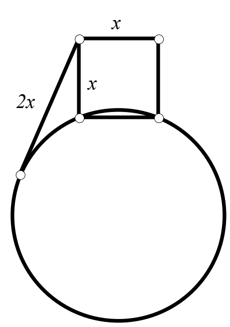


7.1. Ejercicios.

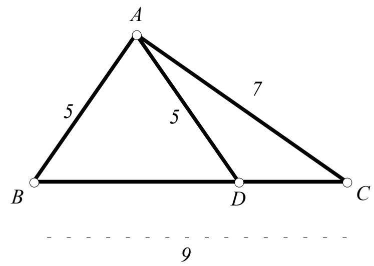
EJERCICIO 70. *En la siguiente figura están trazadas una secante y una tangente que intersectan la circunferencia en los puntos A, B y M. Demuestra que $PM^2 = PA \cdot PB$.*



EJERCICIO 71. *En la siguiente figura, desde un vértice del cuadrado está trazada una tangente, la cual tiene una longitud igual al doble del lado del cuadrado. Encuentra el radio de la circunferencia en función del lado del cuadrado.*



EJERCICIO 72. *En la siguiente figura $AB = AD = 5$, $BC = 9$ y $AC = 7$. Encuentra $\frac{BD}{DC}$.*



EJERCICIO 73. *Demuestra que el eje radical de dos circunferencias es la recta que pasa por los puntos medios de las tangentes comunes.*

EJERCICIO 74. *Demuestra que el eje radical de dos circunferencias es perpendicular a la línea de los centros*[12]*.*

EJERCICIO 75. *Por un punto en el eje radical de dos circunferencias, dibujamos secantes a cada una de las dos circunferencias. Estas secantes determinan cuatro puntos sobre las circunferencias. Demuestra que esos puntos determinan un cuadrilátero cíclico.*

EJERCICIO 76. *Sea BD la bisectriz de ángulo $\measuredangle B$ del triángulo $\triangle ABC$. El circuncírculo del triángulo $\triangle BDC$ intersecta AB en E y el circuncírculo del triángulo $\triangle ABD$ intersecta BC en F. Demuestra que $AE = CF$.*

EJERCICIO 77. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo arbitrario y sea P un punto en el plano del triángulo. Las líneas AP, BP y CP intersectan por segunda vez a la circunferencia circunscrita del triángulo $\triangle ABC$ en los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente. Consideremos dos circunferencias, una que pasa por A y A_1 y otra que pasa por B y B_1. Sean D y D_1 los extremos de la cuerda común de estas circunferencias. Demuestra que C, C_1, D y D_1 se hallan en una misma circunferencia.*

EJERCICIO 78. *Sea C un punto sobre un semicírculo de diámetro AB y sea D el punto medio del arco $\overset{\frown}{AC}$. Sea E la proyección del punto D sobre la línea BC y sea F la intersección de la línea AE con el semicírculo. Demuestra que BF bisecta al segmento DE.*

EJERCICIO 79. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en un semicírculo Γ de diámetro AB. Las líneas AC y BD se intersectan en E y las líneas AD y BC en F. La línea EF intersecta al semicírculo Γ en G y a la línea AB en H. Demuestra que E es el punto medio del segmento GH si y sólo si G es el punto medio del segmento FH.*

EJERCICIO 80. *En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia llamemos P al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y sea M el punto medio de CD. La circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M, corta a BD y a AC en los puntos Q y R, respectivamente. Se toma un punto S sobre el segmento BD, de tal manera que*

[12]Se llama línea de los centros a la línea que pasa por los centros de dos circunferencias.

$BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T. Demuestra que $AT = RC$.

EJERCICIO 81. *Demuestra que si una circunferencia intersecta los lados BC, CA, AB del triángulo $\triangle ABC$ en los puntos D, D'; E, E'; F, F'; respectivamente, entonces*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} = 1.$$

EJERCICIO 82. *En una circunferencia está trazado el diámetro AB y la cuerda CD perpendicular a AB. Una circunferencia arbitraria es tangente a la cuerda CD y al arco BD. Demuestra que la tangente a esta circunferencia trazada a partir del punto A es igual a AC.*

EJERCICIO 83. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo. Los puntos M y N son tomados sobre los lados AB y AC, respectivamente. Los círculos con diámetros BN y CM se intersectan en los puntos P y Q. Demuestra que P, Q y el ortocentro H[13], son colineales.*

EJERCICIO 84. *Dado un punto P, en el plano de un triángulo $\triangle ABC$, sean D, E y F las proyecciones de P sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. El triángulo $\triangle DEF$ es denominado el triángulo pedal del punto P. Demuestra que el área del triángulo $\triangle DEF$ se puede calcular como*

$$|DEF| = \frac{(R^2 - d^2)|ABC|}{4R^2},$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$ y d es la distancia del punto P al circuncentro de $\triangle ABC$. (Teorema de Euler)

EJERCICIO 85. *Sean A, B, C y D cuatro puntos distintos sobre una línea (en ese orden). Los círculos con diámetros AC y BD se intersectan en X y Y. La línea XY intersecta BC en Z. Sea P un punto sobre la línea XY, distinto de Z. La línea CP intersecta el círculo con diámetro AC en C y M, y la línea BP intersecta el círculo con diámetro BD en B y N. Demuestra que las líneas AM, DN y XY son concurrentes.*

EJERCICIO 86. *Sea I el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ΔABC. Esta circunferencia es tangente a los lados BC, CA y AB del triángulo en los puntos K, L y M, respectivamente. La recta paralela a MK que pasa por el punto B intersecta a las rectas LM y LK en los puntos R y S, respectivamente. Demuestra que el ángulo $\measuredangle RIS$ es agudo. (IMO 1998/5)*

[13]El ortocentro de un triángulo es el punto donde se intersectan las alturas.

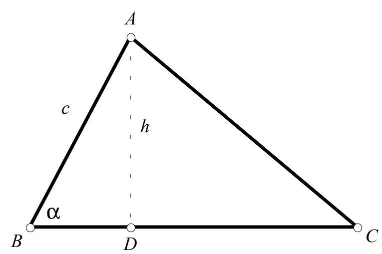
8. Area de triángulos y cuadriláteros

Si en un triángulo conocemos la longitud de un lado y la altura trazada hacia ese lado, es bien sabido que podemos calcular su área simplemente multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura y después dividiendo entre dos. Si embargo, existen otras fórmulas, las cuales en ciertas ocasiones resultan más útiles, por ejemplo:

EJEMPLO 16. *En el triángulo* $\triangle ABC$*, sabemos que* $AB = c$*,* $BC = a$ *y* $\measuredangle ABC = \alpha$*. Probar que*

$$|ABC| = \frac{1}{2}acSen\alpha.$$

SOLUCIÓN 16. *Sea* h *la altura trazada hacia el lado* BC*. Sabemos que* $|ABC| = \frac{1}{2}ah$ *y además como* $\frac{h}{c} = Sen\alpha$*, tenemos que* $|ABC| = \frac{1}{2}acSen\alpha$*.*



Además, del ejercicio 13 tenemos que

$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC} = 2R,$$

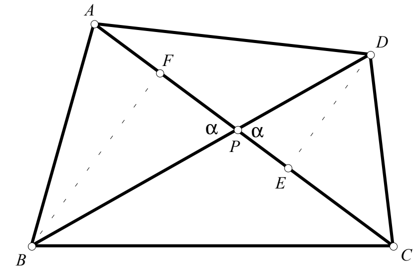
utilizando éste resultado y sustituyéndolo en la fórmula anterior tenemos

$$|ABC| = 2R^2 SenASenBSenC.$$

EJEMPLO 17. *Consideremos ahora un cuadrilátero convexo* $ABCD$*, sea* P *el punto de intersección de* AC *y* BD*. Si sabemos que* $\measuredangle BPC = \alpha$*, entonces*

$$|ABCD| = \frac{1}{2}AC \cdot BDSen\alpha.$$

SOLUCIÓN 17. *Tracemos las perpendiculares desde* B *y* D *sobre* AC*, las cuales intersectan* AC *en* F *y* E*, respectivamente.*



Tenemos que

$$|ABCD| = |ABC| + |ADC| = \frac{1}{2}AC \cdot BF + \frac{1}{2}AC \cdot DE$$

$\Longrightarrow$

$$|ABCD| = \frac{AC \cdot BPSen\alpha + AC \cdot DPSen\alpha}{2} = \frac{AC(BP + DP)Sen\alpha}{2}$$

$\Longrightarrow$

$$|ABCD| = \frac{1}{2}AC \cdot BDSen\alpha.$$

Además, para algunas clases de cuadriláteros podemos encontrar otras fórmulas para calcular el área.

Ejemplo 18. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, y sean $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ y $s = \frac{a+b+c+d}{2}$. Entonces tenemos que*

$$|ABCD| = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Solución 18. *Sea $\measuredangle DAB = \alpha$ y sea $x = BD$. Tenemos que*

$$|ABCD| = |ABD| + |BCD| = \frac{1}{2}(ad + bc)Sen\alpha = \frac{1}{2}(ad + bc)\sqrt{1 - Cos^2\alpha},$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} x^2 &= b^2 + c^2 + 2bcCos\alpha \\ x^2 &= a^2 + d^2 - 2adCos\alpha \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$Cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2bc + 2ad}$$

$\Longrightarrow$

$$|ABCD| = \frac{1}{2}(ad + bc)\sqrt{\frac{(2bc + 2ad)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{(2bc + 2ad)^2}}$$

$\Longrightarrow$

$$|ABCD| = \frac{\sqrt{(2bc + 2ad + b^2 + c^2 - a^2 - d^2)(2bc + 2ad - b^2 - c^2 + a^2 + d^2)}}{4}$$

$\Longrightarrow$

$$|ABCD| = \frac{1}{4}\sqrt{[(b + c)^2 - (a - d)^2][(a + d)^2 - (b - c)^2]}$$

$$|ABCD| = \frac{1}{4}\sqrt{(b + c + d - a)(b + c + a - d)(a + d + c - b)(a + d + b - c)}$$

$$|ABCD| = \sqrt{(s-a)(s-d)(s-b)(s-c)}.$$

La fórmula anterior es conocida como la *fórmula de Brahmagupta*. Cuando el cuadrilátero se degenera en triángulo, obtenemos la conocida *fórmula de Herón*, por ejemplo, si $D = A$ entonces tenemos que

$$|ABC| = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s)}.$$

EJEMPLO 19. *Las áreas de los triángulos formados por segmentos de las diagonales de un trapecio y sus bases son S_1 y S_2. Hallar el área del trapecio.*

SOLUCIÓN 19. *En el trapecio $ABCD$ sea P el punto de intersección de las diagonales, y sean $|DPC| = S_2$, $|APB| = S_1$ y $\measuredangle DPC = \alpha$. Tenemos que*

$$\sqrt{|APB| \cdot |DPC|} = \sqrt{(AP \cdot PBSen\alpha)(DP \cdot PCSen\alpha)}$$

$\Longrightarrow$

$$\sqrt{|APB| \cdot |DPC|} = \sqrt{(AP \cdot DPSen\alpha)(BP \cdot PCSen\alpha)}$$

$\Longrightarrow$

$$\sqrt{|APB| \cdot |DPC|} = \sqrt{|APD| \cdot |BPC|}$$

pero como $|APD| = |BPC|$, tenemos que

$$\sqrt{|APB| \cdot |DPC|} = \sqrt{S_1 \cdot S_2} = |APD| = |BPC|$$

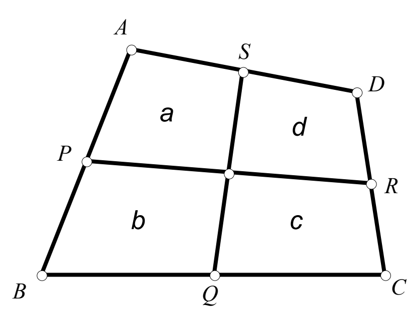
$\Longrightarrow$

$$|ABCD| = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2.$$

8.1. Ejercicios.

EJERCICIO 87. *Tenemos dos triángulo con un vértice A común, los demás vértices se encuentran en dos rectas que pasan por A. Demuestra que la razón entre las áreas de estos triángulos es igual a la razón entre los productos de los dos lados de cada triángulo que contienen el vértice A.*

EJERCICIO 88. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sean P, Q, R y S los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Se trazan las líneas PR y QS las cuales dividen el cuadrilátero en cuatro cuadriláteros más pequeños cuyas áreas se muestran en la figura. Demuestra que $a + c = b + d$.*



EJERCICIO 89. *En el trapecio $ABCD$, de bases AB y DC, las diagonales se intersectan en el punto E, el área del $\triangle ABE$ es 72 y el área del $\triangle CDE$ es 50. ¿Cuál es el área del trapecio $ABCD$?*

EJERCICIO 90. *Demuestra que $|ABC| = rs$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.*

EJERCICIO 91. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, y sean $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ y $s = \frac{a+b+c+d}{2}$. Sean además, α y β dos ángulos opuestos en el cuadrilátero. Demuestra que*

$$|ABCD| = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd\,(1 + Cos(\alpha+\beta))}.$$

EJERCICIO 92. *Demuestra que la suma de las distancias, desde cualquier punto interior de un triángulo equilátero, hasta sus lados es igual a la altura de éste triángulo.*

EJERCICIO 93. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con $AB = AC$. Los puntos D y E están sobre los lados AB y AC, respectivamente. La línea que pasa por B y paralela a AC intersecta la línea DE en F. La línea que pasa por C y paralela a AB intersecta la línea DE en G. Demuestra que*

$$\frac{|DBCG|}{|FBCE|} = \frac{AD}{AE}.$$

EJERCICIO 94. *Demuestra que*

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r},$$

donde h_1, h_2, h_3 son las alturas del triángulo; r el radio de la circunferencia inscrita.

EJERCICIO 95. *En el paralelogramo $ABCD$, los vértices A, B, C y D están unidos con los puntos medios de los lados CD, AD, AB y BC, respectivamente. Demuestra que el área del cuadrilátero formado por éstas rectas tiene una quinta parte del área del paralelogramo.*

EJERCICIO 96. *Sobre los catetos AC y BC de un triángulo rectángulo hacia el exterior están construidos los cuadrados $ACKL$ y $BCMN$. Demuestra que el cuadrilátero acotado por los catetos y las rectas LB y NA es equivalente al triángulo formado por las rectas LB, NA y la hipotenusa AB.*

EJERCICIO 97. *Están dados los puntos E, F, G, H, sobre la continuación de los lados AB, BC, CD, DA, de un cudrilátero convexo $ABCD$, tales que $BE = AB$, $CF = BC$, $DG = CD$, $AF = DA$. Demuestra que*

$$|EFGH| = 5 \cdot |ABCD|.$$

EJERCICIO 98. *En los lados AC y BC del triángulo $\triangle ABC$, hacia el exterior están construidos dos paralelogramos $ACDE$ y $BCFG$. Las prolongaciones de DE y FG se intersectan en el punto H. Sobre el lado AB*

está construido el paralelogramo $ABML$, cuyos lados AL y BM son iguales y paralelos a HC. Demuestra que $|ABML| = |ACDE| + |BCFG|$[14].

EJERCICIO 99. *En un cuadrilátero convexo $ABCD$, los puntos medios de los lados BC y DA son E y F, respectivamente. Demuestra que*

$$|EDA| + |FBC| = |ABCD|.$$

EJERCICIO 100. *A través de cierto punto tomado dentro del triángulo, se han trazado tres rectas paralelas respectivamente a sus lados. Estas rectas dividen el área del triángulo en seis partes, tres de las cuales son triángulos con áreas iguales a S_1, S_2 y S_3. Halla el área del triángulo dado.*

EJERCICIO 101. *Por los extremos de la base menor de un trapecio están trazadas dos rectas paralelas que cortan la base mayor. Las diagonales del trapecio y éstas rectas dividen el trapecio en siete triángulos y un pentágono. Demuestra que la suma de las áreas de tres triángulos adyacentes a los lados y a la base menor del trapecio, es igual al área del pentágono.*

EJERCICIO 102. *Sea $ABCD$ un paralelogramo; el punto E se halla en la recta AB; F, en la recta AD (B, en el segmento AE; D, en el segmento AF), K es el punto de intersección de las rectas ED y FB. Demuestra que*

$$|ABKD| = |CEKF|.$$

[14]Este es conocido como *Teorema generalizado de Pitágoras.*

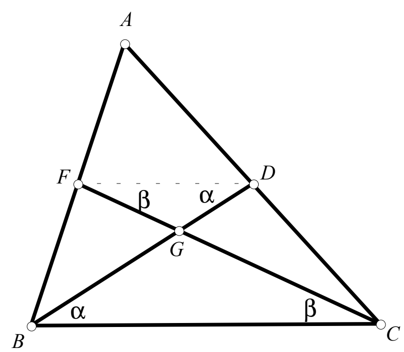
CAPÍTULO 2

Puntos notables en el triángulo

1. Las medianas y el gravicentro

El segmento de recta que une el vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto se llama *mediana*.

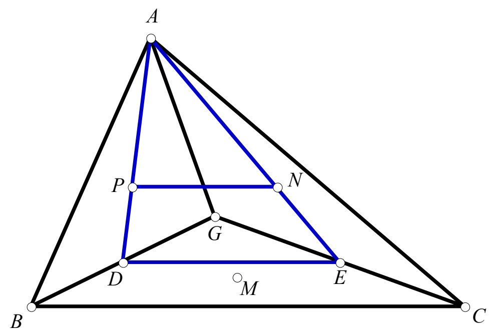
TEOREMA 12. *Las medianas en un triángulo se intersectan en un punto y se dividen por éste en la razón* $2:1$*, a partir de los vértices.*



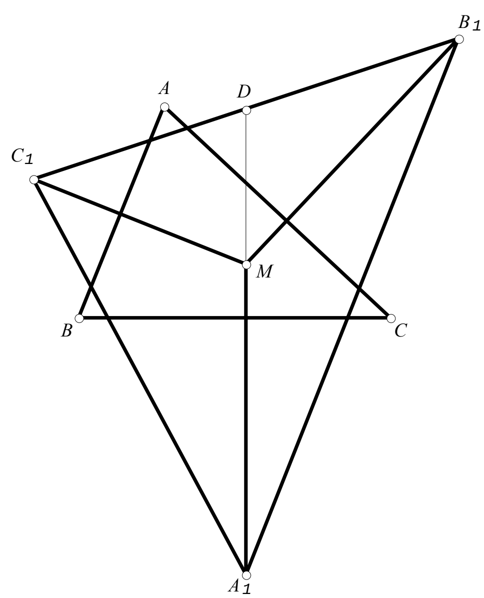
DEMOSTRACIÓN. Sean CF y BD dos medianas del triángulo $\triangle ABC$. Llamemos G al punto de intersección de estas dos medianas. Debido al teorema de Tales tenemos que FD es paralelo a BC, de aqui se sigue que $\measuredangle GFD = \measuredangle GCB = \beta$ ya que son ángulos alternos internos. Análogamente $\measuredangle GDF = \measuredangle GBC = \alpha$ y tenemos que el triángulo $\triangle GDF$ es semejante al triángulo $\triangle GBC$ con una razón de semejanza igual a $\frac{1}{2}$ debido a que $FD = \frac{1}{2}BC$. Con esto tenemos que $FG = \frac{1}{2}GC$ y $DG = \frac{1}{2}GB$ y por lo tanto las medianas CF y BD se cortan en el punto G en la razón $2:1$. Haciendo un análisis similar se puede llegar a que la mediana que no consideramos se intersecta con cualquiera de las dos medianas anteriores en un punto tal que quedan divididas en la razón $2:1$, por lo que ese punto de intersección debe ser G, y de aquí concluimos que las tres medianas se intersectan en un punto el cual llamamos *centroide* (gravicentro, baricentro, centro de gravedad), y se dividen en la razón $2:1$ a partir de los vértices. ∎

EJEMPLO 20. *Sea* G *el centroide de un trángulo* $\triangle ABC$*, y sean* M*,* N *y* P *los centroides de los triángulos* $\triangle BGC$*,* $\triangle CGA$ *y* $\triangle AGB$*, respectivamente. Demuestra que el triángulo* $\triangle MNP$ *es semejante al triángulo* $\triangle ABC$*.*

Solución 20. *Sean D y E los puntos medios de BG y CG, respectivamente. Tenemos que DE es paralelo a BC, además, como $AP : PD = AN : NE = 2 : 1$ entonces PN es paralelo a DE y consecuentemente a BC. Análogamente, PM es paralelo a AC y MN es paralelo a AB. Como tenemos que $\triangle MNP$ y $\triangle ABC$ tienen sus lados paralelos, entonces son semejantes.*



Ejemplo 21. *Del punto M, situado en el interior del $\triangle ABC$, se trazan perpendiculares a los lados BC, AC, AB y en ellas se marcan los segmentos MA_1, MB_1 y MC_1 iguales a los correspondientes lados del triángulo. Demuestra que el punto M es el centro de gravedad del $\triangle A_1B_1C_1$.*



Solución 21. *Sea D el punto de intersección de la línea A_1M y el segmento C_1B_1. Tenemos que*

$$\frac{C_1D}{DB_1} = \frac{|C_1DA_1|}{|B_1DA_1|} = \frac{|C_1DM|}{|B_1DM|} = \frac{|C_1DA_1| - |C_1DM|}{|B_1DA_1| - |B_1DM|},$$

esto es

$$\frac{C_1D}{DB_1} = \frac{|C_1MA_1|}{|B_1MA_1|}.$$

Por otro lado, tenemos que $|C_1MA_1| = |ABC| = |B_1MA_1|$*, entonces* $C_1D = DB_1$*, es decir* A_1D *es una mediana del triángulo* $\triangle A_1B_1C_1$*. Análogamente se demuestra que* C_1M *y* B_1M *son medianas del triángulo* $\triangle A_1B_1C_1$*, por lo tanto* M *es el centroide de éste triángulo.*

Con lo demostrado anteriormente, tenemos que si G es un punto interior de un triángulo $\triangle ABC$, entonces éste será su centroide si y sólo si $|ABM| = |BCM| = |CAM|$.

1.1. Ejercicios.

EJERCICIO 103. *Demuestra que las medianas dividen el triángulo en seis partes de áreas iguales.*

EJERCICIO 104. *Demuestra que el área del triángulo, cuyos lados son iguales a las medianas de un triángulo dado, es igual a* $\frac{3}{4}$ *del área del triángulo dado.*

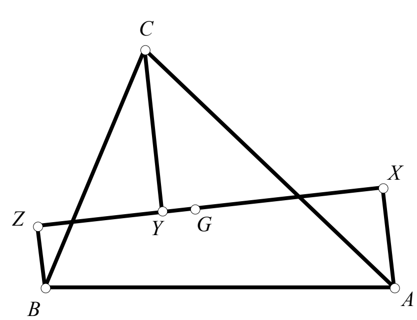
EJERCICIO 105. *Los lados de un triángulo son* a*,* b *y* c*. Demuestra que la mediana* m_a *trazada hacia el lado* a *se calcula por la fórmula*

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

EJERCICIO 106. *Demuestra que si en un triángulo dos medianas son iguales entonces el triángulo es isósceles.*

EJERCICIO 107. *Demuestra que la longitud de la mediana trazada hacia la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a a la mitad de la longitud de la hipotenusa.*

EJERCICIO 108. *En un triángulo* $\triangle ABC$ *se dibuja una línea que pasa por el centroide de éste. Se dibujan perpendiculares desde cada uno de los vértices del triángulo hacia esa línea, las cuales la intersectan en los puntos que se muestran en la figura siguiente. Demuestra que* $CY = AX + BZ$*.*



Ejercicio 109. *En un cuadrilátero convexo definiremos una mediana como la línea que une un vértice con el centroide del triángulo formado por los tres vértices restantes. Demuestra que las cuatro medianas en un cuadrilátero se intersectan en un punto y que además se dividen por éste en la razón* $3:1$.

Ejercicio 110. *En un triángulo* $\triangle ABC$ *con medianas* AD, BE, *y* CF, *sea* $m = AD + BE + CF$, *y sea* $s = AB + BC + CA$. *Demuestra que*

$$\frac{3}{2}s > m > \frac{3}{4}s.$$

Ejercicio 111. *Demuestra que*

$$\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2.$$

Ejercicio 112. *Demuestra que si en un triángulo se cumple que* $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$ *entonces éste es un triángulo rectángulo.*

Ejercicio 113. *Si* AE *y* BF *son las medianas trazadas hacia los catetos de un triángulo rectángulo* $\triangle ABC$, *encuentre el valor de*

$$\frac{AE^2 + BF^2}{AB^2}.$$

Ejercicio 114. *En los lados* CA *y* CB *del triángulo* $\triangle ABC$, *fuera de él se construyen los cuadrados* CAA_1C_1 *y* CBB_1C_2. *Demuestra que la mediana del triángulo* $\triangle CC_1C_2$ *trazada por el vértice* C *es perpendicular al lado* AB *e igual a su mitad.*

Ejercicio 115. *En los lados del triángulo, fuera de él, están construidos los triángulos equiláteros* $\triangle ABC_1$, $\triangle BA_1C$ *y* $\triangle CAB_1$. *Demuestra que los centroides de los triángulos* $\triangle ABC$ *y* $\triangle A_1B_1C_1$ *coinciden.*

Ejercicio 116. *Demuestra que en el triángulo* $\triangle ABC$, *con centroide* G, *tenemos*

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2).$$

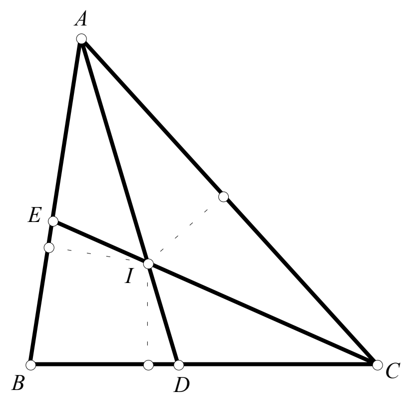
Ejercicio 117. *Teorema de Leibniz. Supongamos que* M *es un punto arbitrario del plano,* G *el centroide del triángulo* $\triangle ABC$. *Entonces se cumple la igualdad*

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

2. Las bisectrices y el incentro

La recta que divide un ángulo en dos ángulos iguales se llama *bisectriz*, y se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados que forman el ángulo. Esto quiere decir que si tomamos un punto cualquiera sobre la bisectriz de un ángulo, este punto estará a la misma distancia de las dos rectas que forman el ángulo.

TEOREMA 13. *Las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo se intersectan en un punto, el cual es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.*

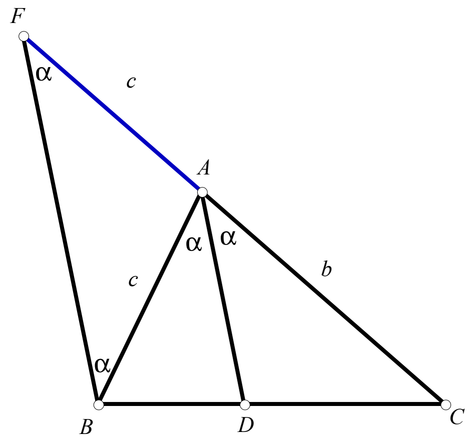


DEMOSTRACIÓN. Sean D y E los puntos donde las bisectrices internas de los ángulos $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle BCA$ cortan a los lados BC y AB, y sea I el punto de intersección de los segmentos AD y CE. Como AD bisecta al $\measuredangle BAC$ entonces I equidista de los lados AB y AC; además como I también pertenece al segmento CE, el cual bisecta al $\measuredangle BCA$, entonces I equidista de los lados BC y AC. Como I equidista de los lados AB y BC entonces la bisectriz del $\measuredangle ABC$ también pasa por el punto I, por lo que las tres bisectrices concurren en este punto. Este punto de intersección es llamado *incentro*, ya que podemos trazar una circunferencia que sea tangente a los tres lados del triángulo y que tenga como centro al punto I. ∎

EJEMPLO 22. *Sea D el punto donde la bisectriz del $\measuredangle BAC$ de un triángulo corta al lado BC, y sean a, b y c los lados BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que*

$$BD = \frac{ac}{b+c}.$$

SOLUCIÓN 22. *Un truco muy bonito y el cual puede ser muy útil en la mayoría de los problemas donde tenemos una suma de distancias, es el construir esa distancia. Por ejemplo, en nuestro problema necesitamos construir la distancia $b + c$. Prolonguemos CA hasta un punto F de tal manera que $AF = AB = c$,*



tenemos entonces que el triángulo $\triangle FAB$ es un triángulo isósceles. Sea $\measuredangle BAC = 2\alpha$, como $\measuredangle BFA + \measuredangle ABF = 2\alpha$ tenemos que $\measuredangle BFA = \measuredangle ABF = \alpha$, esto implica que FB es paralelo a AD. Ahora, por el teorema de Tales tenemos que

$$\frac{BD}{FA} = \frac{BC}{FC} \Longrightarrow BD = \frac{BC \cdot FA}{FC} = \frac{ac}{b+c},$$

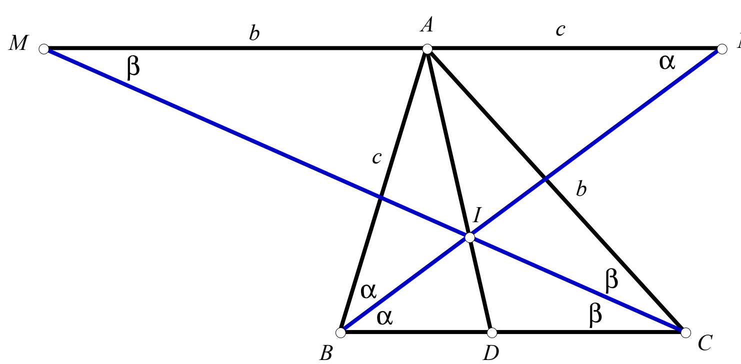
lo cual queríamos demostrar.

Ejemplo 23. *Sean a, b y c los lados BC, CA y AB, de un triángulo $\triangle ABC$. Sea I el incentro y D el punto donde la bisectriz del $\measuredangle BAC$ corta al lado BC. Demuestra que*

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}.$$

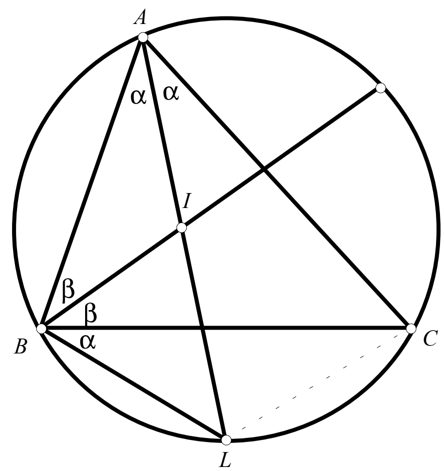
Solución 23. *Por A trazamos una paralela a BC. Las bisectrices de $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ intersectan a esta paralela en N y M, respectivamente. Como $\measuredangle AMC = \measuredangle ACM = \beta$ tenemos $AM = AC = b$. Análogamente, $AN = AB = c$. Además, tenemos que $\triangle IMN \sim \triangle ICB$, esto implica que*

$$\frac{AI}{ID} = \frac{MN}{BC} = \frac{b+c}{a}.$$



Ejemplo 24. *En un triángulo $\triangle ABC$ sea I el incentro. Demuestra que el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle BIC$ está sobre la línea AI.*

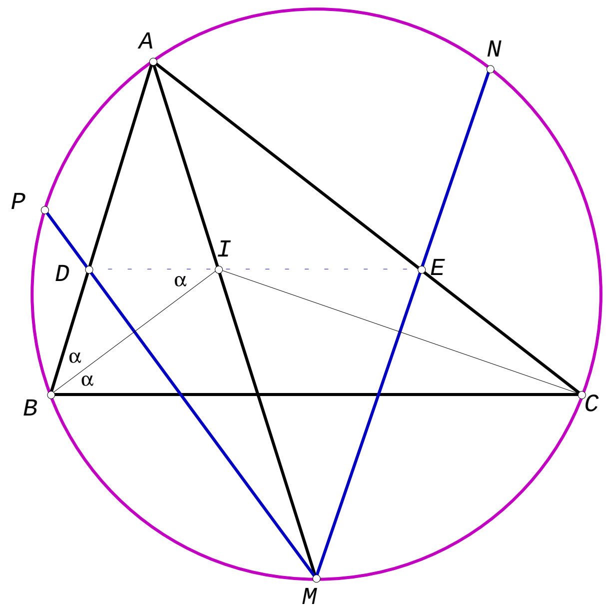
Solución 24. *Sea L el punto donde la bisectriz del $\measuredangle A$ intersecta al circuncírculo. L es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle BIC$. Para probarlo, basta demostrar que $LB = LI = LC$. Tenemos que $LB = LC$, por ser cuerdas de arcos iguales. Por otro lado, tenemos que $\measuredangle BIL = \measuredangle BAI + \measuredangle ABI = \alpha + \beta$, además tenemos que $\measuredangle CBL = \measuredangle CAL = \alpha$ y con esto llegamos a que $\measuredangle IBL = \alpha + \beta$. Hemos desmostrado entonces, que el triángulo $\triangle BIL$ es isósceles y con esto tenemos que $LB = LI = LC$.*[1]



Ejemplo 25. *Sean M, N, y P, los puntos medios de los arcos BC, CA y AB, respectivamente, de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$. MP y MN intersectan en D y E a los lados AB y AC. Demuestra que DE es paralela a BC y que pasa por el incentro del triángulo $\triangle ABC$.*

Solución 25. *Sea I el incentro del triángulo. Usando el resultado del ejemplo anterior, tenemos que $PB = PI$ y $MB = MI$. Con esto tenemos que MP es la mediatriz de BI, lo que implica que $BD = DI$ y $\measuredangle DBI = \measuredangle DIB = \measuredangle IBC$, es decir, DI es paralela a BC. Análogamente, se demuestra que EI es paralela a BC. Por lo tanto, DE es paralela a BC y pasa por el incentro del triángulo $\triangle ABC$.*

[1] Este resultado es bastante usado al resolver problemas que tienen que ver con las bisectrices y el incentro de un triángulo.



2.1. Ejercicios.

Ejercicio 118. *Demuestra que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide por la mitad el ángulo entre la mediana y la altura bajadas sobre la hipotenusa.*

Ejercicio 119. *Sea I el incentro de un triángulo $\triangle ABC$. Sea $\measuredangle BAC = \alpha$. Demuestra que*

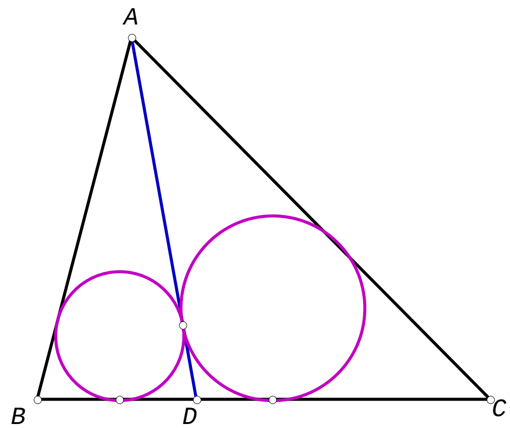
$$\measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Ejercicio 120. *Se da una circunferencia y un punto A fuera de ésta. AB y AC son tangentes a la circunferencia (B y C son los puntos de tangencia). Demuestra que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$ se halla en la circunferencia dada.*

Ejercicio 121. *Sea r el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en C. Sean $AB = c$, $BC = a$ y $CA = b$. Demuestra que*

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Ejercicio 122. *Sea D un punto en el lado BC de un triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que los incírculos de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ADC$ son tangentes entre sí, si y sólo si, D es el punto de tangencia del incírculo del triángulo $\triangle ABC$.*



EJERCICIO 123. *Demuestra que si a y b son dos lados de un triángulo, α es el ángulo entre estos y l, la bisectriz de éste ángulo, entonces*

$$l = \frac{2abCos\frac{\alpha}{2}}{a+b}.$$

EJERCICIO 124. *Sea AD la bisectriz del $\measuredangle BAC$ de un triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

EJERCICIO 125. *El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito a una circunferencia con centro O. Demuestra que*

$$\measuredangle AOB + \measuredangle COD = 180^\circ.$$

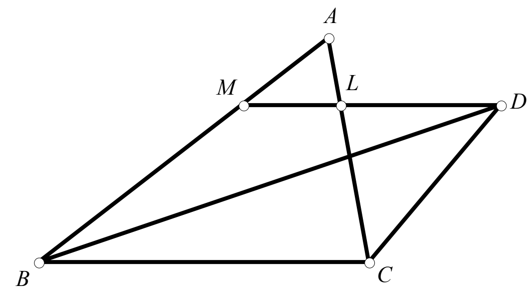
EJERCICIO 126. *Sean a, b y c los lados BC, CA y AB, de un triángulo $\triangle ABC$. Sean I el incentro y G el gravicentro del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que IG es paralelo a BC si y sólo si $2a = b + c$.*

EJERCICIO 127. *Las bisectrices de los ángulos A y B del triángulo $\triangle ABC$ intersectan los lados BC y CA en los puntos D y E, respectivamente. Si se cumple que $AE + BD = AB$, determina el ángulo C.*

EJERCICIO 128. *En un triángulo $\triangle ABC$, $\measuredangle A = 60^\circ$ y las bisectrices BB' y CC' se intersectan en I. Demuestra que $IB' = IC'$.*

EJERCICIO 129. *En un triángulo $\triangle ABC$, sean E y D puntos sobre los lados AB y AC, repectivamente. BF bisecta el $\measuredangle ABD$, y CF bisecta $\measuredangle ACE$. Demuestra que $\measuredangle BEC + \measuredangle BDC = 2\measuredangle BFC$.*

EJERCICIO 130. *La bisectriz interior de $\measuredangle B$ y la bisectriz exterior de $\measuredangle C$ de un $\triangle ABC$ se intersectan en D. A través de D se traza una línea paralela a BC la cual intersecta AC en L y AB en M. Si las longitudes de LC y MB son 5 y 7, respectivamente. Encuentra la longitud de LM.*



Ejercicio 131. *Demuestra que las cuatro proyecciones del vértice* A *del triángulo* $\triangle ABC$ *sobre las bisectrices exteriores e interiores de los ángulos* $\measuredangle B$ *y* $\measuredangle C$ *son colineales.*

Ejercicio 132. *Sobre la base* AC *del triángulo isósceles* $\triangle ABC$ *se toma un punto* M *de manera que* $AM = a$, $MC = b$. *En los triángulos* $\triangle ABM$ *y* $\triangle CBM$ *están inscritas circunferencias. Encuentra la distancia entre los puntos de tangencia del lado* BM *con esta circunferencias.*

Ejercicio 133. *En los lados opuestos* BC *y* DA *de un cuadrilátero convexo se toman los puntos* M *y* N, *de tal manera que*

$$BM : MC = AN : ND = AB : CD.$$

Demuestra que la recta MN *es paralela a la bisectriz del ángulo formado por los lados* AB *y* CD.

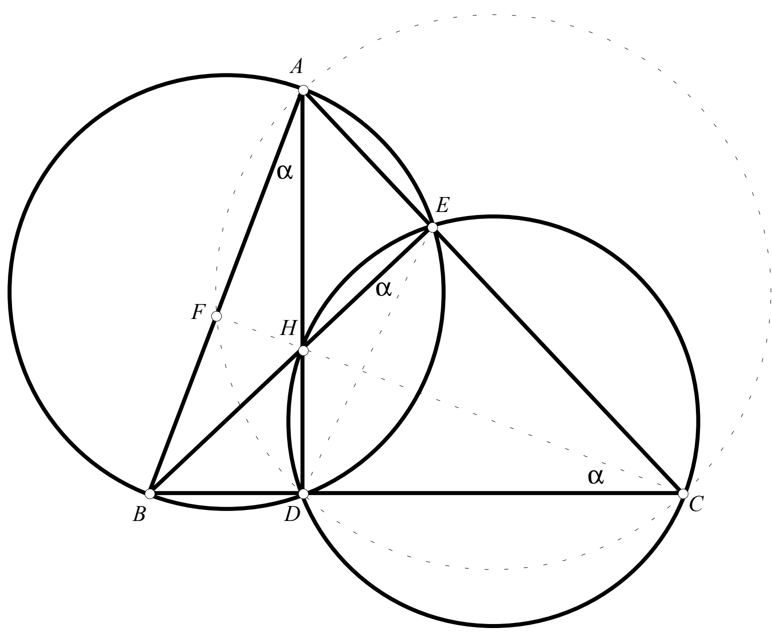
Ejercicio 134. *El triángulo* $\triangle ABC$ *está inscrito en una circunferencia. Las bisectrices interiores de los ángulos* $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ *y* $\measuredangle C$, *cortan a la circunferencia de nuevo en los puntos* D, E *y* F, *respectivamente. Demuestra que*
a) $|DEF| \geq |ABC|$.
b) $DE + EF + FA \geq AB + BC + CA$.
c) $AD + BE + CF > AB + BC + CA$.

Ejercicio 135. *Dado el triángulo* $\triangle ABC$, *se traza una línea* l *paralela al lado* AB *la cual pasa por el vértice* C. *La bisectriz del ángulo* $\measuredangle BAC$ *intersecta el lado* BC *en* D *y a* l *en* E. *La bisectriz del ángulo* $\measuredangle ABC$ *intersecta el lado* AC *en* F *y a* l *en* G. *Si* $GF = DE$, *demuestra que* $AC = BC$.

3. Las alturas y el ortocentro

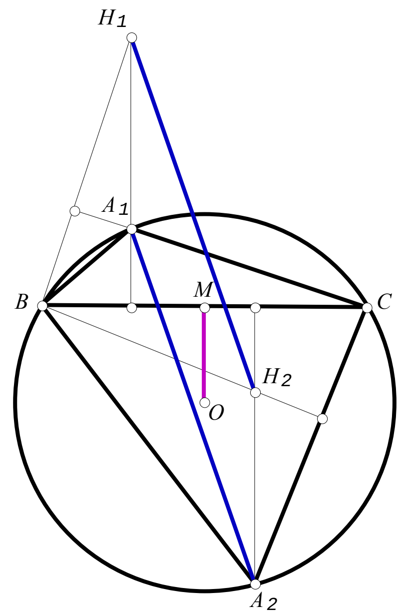
TEOREMA 14. *Las alturas de un triángulo se intersectan en un punto.*

DEMOSTRACIÓN. En el triángulo $\triangle ABC$ sean D y E los pies de las alturas sobre los lados BC y AC, respectivamente, y sea H el punto de intersección de AD y BE. Se traza la línea CH la cual intersecta al lado AB en el punto F. Para demostrar que CF es una altura, bastará con demostrar que el cuadrilátero $AFDC$ es cíclico, porque así de esta manera el $\measuredangle AFC$ sería igual al $\measuredangle ADC = 90°$. Como $\measuredangle HDC = 90° = \measuredangle HEC$ entonces el cuadrilátero $HDCE$ es cíclico, por lo que el $\measuredangle HED = \measuredangle HCD = \alpha$. Por otro lado, el cuadrilátero $BDEA$ también es cíclico ya que $\measuredangle BDA = 90° = \measuredangle BEA$, por lo que $\measuredangle BAD = \measuredangle BED = \alpha$. Como $\measuredangle BAD = \measuredangle FCB = \alpha$, entonces se concluye que el cuadrilátero $AFDC$ es cíclico y por lo tanto CF es una altura del triángulo $\triangle ABC$. El punto H es llamado *ortocentro* del triángulo.



∎

EJEMPLO 26. *Dos triángulos $\triangle A_1BC$ y $\triangle A_2BC$ estan inscritos en un círculo y tienen el lado BC en común. Sean H_1 y H_2 los ortocentros de los triángulos $\triangle A_1BC$ y $\triangle A_2BC$, respectivamente. Demuestra que el segmento H_1H_2 es igual y paralelo al segmento A_1A_2.*



Solución 26. *Sean O el centro del círculo y M el punto medio de BC. Sabemos que la distancia de un vértice al ortocentro es el doble de la distancia del centro de la circunferencia hacia el lado opuesto a ese vértice*[2]*, con esto tenemos que $H_1A_1 = 2 \cdot OM$ y $H_2A_2 = 2 \cdot OM$, esto implica que $H_1A_1 = H_2A_2$ y además son paralelas, por lo tanto $H_1A_1A_2H_2$ es un paralelogramo.*

3.1. Ejercicios.

Ejercicio 136. *Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se intersectan en los puntos A y B. Demuestra que AB es perpendicular a O_1O_2.*

Ejercicio 137. *Demuestra que en un triángulo los puntos simétricos al ortocentro, con respecto a los lados, están en la circunferencia circunscrita.*

Ejercicio 138. *Sea AD la altura de el triángulo $\triangle ABC$, H el ortocentro. Demuestra que $BD \cdot DC = AD \cdot DH$.*

Ejercicio 139. *Demuestra que el producto de las partes en las cuales el ortocentro divide una altura, es el mismo para las tres alturas.*

Ejercicio 140. *Sea H el ortocentro de un triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que los circuncírculos de los cuatro triángulos $\triangle ABC$, $\triangle HBC$, $\triangle HAC$ y $\triangle HAB$, tienen todos el mismo radio.*

Ejercicio 141. *Demuestra que el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico*[3]*.*

[2] Este resultado es bastante útil. Su demostración se deja como ejercicio en la siguiente sección.

[3] El *triángulo órtico* es el formado por los pies de las alturas.

Ejercicio 142. *Sea* H *el ortocentro de el triángulo* $\triangle ABC$*. En la recta* CH *se toma un punto* K *tal que* $\triangle ABK$ *es un triángulo rectángulo. Demuestra que* $|ABK| = \sqrt{|ABC| \cdot |ABH|}$*.*

Ejercicio 143. *Sean* AD*,* BE *y* CF *las alturas de un triángulo acutángulo* $\triangle ABC$ *y sea* H *su ortocentro. Sea* N *el punto medio de* AH *y sea* M *el punto medio de* BC*. Demuestra que* NM *es perpendicular a* FE*.*

Ejercicio 144. *El triángulo* $\triangle ABC$ *está inscrito en una circunferencia. Las bisectrices interiores de los ángulos* $\measuredangle A$*,* $\measuredangle B$ *y* $\measuredangle C$*, cortan a la circunferencia de nuevo en los puntos* D*,* E *y* F*, respectivamente. Sea* I *el incentro del triángulo* $\triangle ABC$*. Demuestra que* I *es el ortocentro del triángulo* $\triangle DEF$*.*

Ejercicio 145. *Sea* AD *la altura desde* A *en el triángulo* $\triangle ABC$*. Sean* X *y* Y *los puntos medios de las otras dos alturas, y sea* H *el ortocentro y* M *el punto medio de* BC*. Demuestra que el circuncírculo del triángulo* $\triangle DXY$ *pasa por* H *y por* M*. También Demuestra que los triángulos* $\triangle ABC$ *y* $\triangle DXY$ *son semejantes.*

Ejercicio 146. *Sean* E *y* F *puntos sobre los lados* BC *y* CD*, respectivamente, de un cuadrado* $ABCD$*. Sean* M *y* N *las intersecciones de* AE *y* AF *con* BD*, y sea* P *la intersección de* MF *con* NE*. Si* $\measuredangle EAF = 45°$*, demuestra que* AP *es perpendicular a* EF*.*

Ejercicio 147. *Sea* $ABCD$ *un rectángulo y sea* P *un punto sobre su circuncírculo, diferente de los vértices del rectángulo. Sea* X*,* Y*,* Z *y* W *las proyecciones de* P *sobre las líneas* AB*,* BC*,* CD*, y* DA*, respectivamente. Demuestra que uno de los puntos* X*,* Y*,* Z *ó* W *es el ortocentro del triángulo formado por los otros tres.*

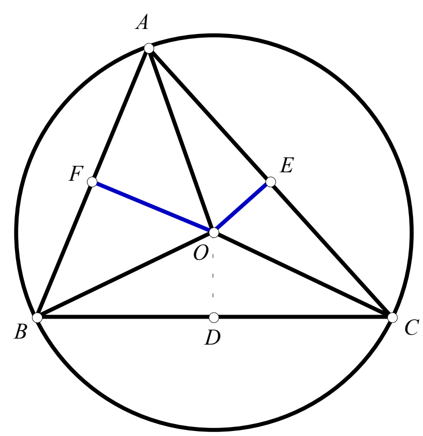
Ejercicio 148. AD*,* BE *y* CF *son las alturas de un triángulo acutángulo* $\triangle ABC$*.* K *y* M *son puntos en los segmentos* DF *y* EF*, respectivamente. Demuestra que si los ángulos* $\measuredangle MAK$ *y* $\measuredangle CAD$ *son iguales, entonces* AK *bisecta el ángulo* $\measuredangle FKM$*.*

4. Las mediatrices y el circuncentro

La línea perpendicular a un segmento por su punto medio se llama *mediatriz* del segmento y se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento dado.

Teorema 15. *Las mediatrices de los tres lados de un triángulo se intersectan en un punto, el cual es el centro de la circuferencia circunscrita a dicho triángulo.*

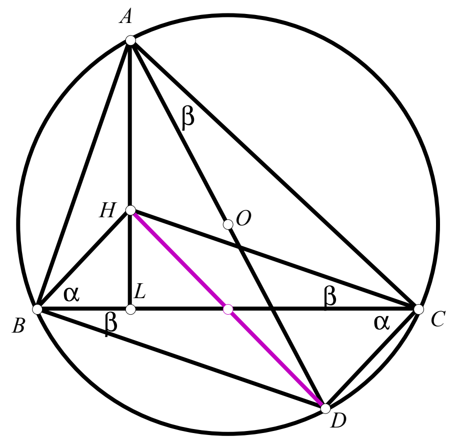
Demostración. Sea $\triangle ABC$ el triángulo, D, E, F los puntos medios de los lados BC, CA, y AB, respectivamente. Trazamos las mediatrices de los lados AB y AC las cuales se intersectan en el punto O. Tenemos que $AO = BO$, por definición de mediatriz, y de la misma manera $AO = CO$. Como $BO = CO$ entonces DO es mediatriz del lado BC, por lo que las tres mediatrices se intersectan en un punto llamado *circuncentro*, el cual es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



$\blacksquare$

Ejemplo 27. *En un triángulo $\triangle ABC$ sean H el ortocentro y O el circuncentro. Sea D el punto donde la línea AO intersecta al circuncírculo. Demuestra que HD bisecta el lado BC.*

Solución 27. *Tenemos que $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC$ y $\measuredangle ACD = 90°$, entonces $\beta = \measuredangle CAD = 90° - \measuredangle ADC = 90° - \measuredangle ABC = \measuredangle HCB$ y como $\measuredangle CBD = \measuredangle CAD = \beta$, tenemos que HC es paralela a BD. Por otro lado, $\alpha = \measuredangle BCD = \measuredangle BAD = \measuredangle BAC - \beta$, y además como $\measuredangle BAL = 90° - \measuredangle ABC = \beta$, tenemos que $\measuredangle HBC = \measuredangle LAC = \measuredangle BAC - \beta = \alpha$, entonces HB es paralela a CD. Tenemos entonces que $HBDC$ es un paralelogramo y por lo tanto, sus diagonales se bisectan.*

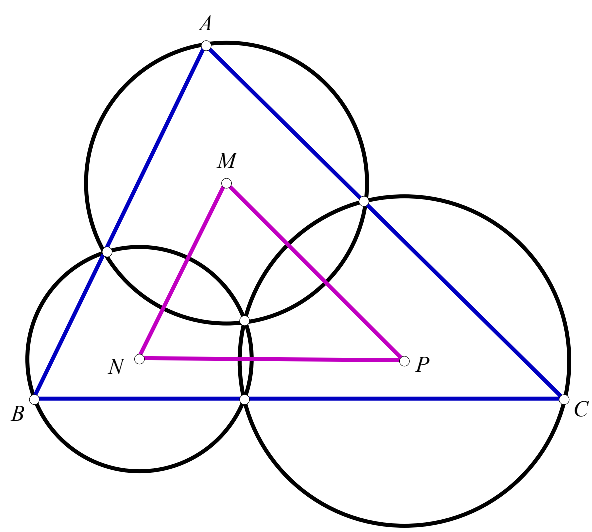


4.1. Ejercicios.

Ejercicio 149. *En un triángulo equilátero $\triangle ABC$, el punto K divide el lado AC en la razón $2:1$ y el punto M divide al lado AB en la razón $1:2$. Demuestra que la longitud del segmento KM es igual al radio de la circunferencia circunscrita en el triángulo $\triangle ABC$.*

Ejercicio 150. *Si s, r, R son el semiperímetro, el inradio y el circunradio, respectivamente, Demuestra que $abc = 4srR$.*

Ejercicio 151. *Demuestra que el triángulo formado por los centros de las circunferencias es semejante al triángulo $\triangle ABC$.*



Ejercicio 152. *En un triángulo $\triangle ABC$ sean H el ortocentro, O el circuncentro, M el punto medio del lado BC. Demuestra que AH es el doble de OM.*

Ejercicio 153. *Sean* M *y* N *las proyecciones del ortocentro de un triángulo* $\triangle ABC$ *sobre las bisectrices interior y exterior del ángulo* $\measuredangle B$. *Demuestra que la línea* MN *divide el lado* AC *por la mitad.*

Ejercicio 154. *En un triángulo* $\triangle ABC$ *sea* H *el ortocentro,* O *el circuncentro, sea* AL *la bisectriz de el* $\measuredangle BAC$. *Demuestra que* AL *biseca el* $\measuredangle HAO$.

Ejercicio 155. *Sean* AD, BE *y* CF *las alturas de un triángulo acutángulo* $\triangle ABC$ *y sean* H *y* O *su ortocentro y circuncentro, respectivamente. La línea* AO *intersecta a* CF *en el punto* P. *Si* $FP = HE$ *demuestra que* $AB = BC$.

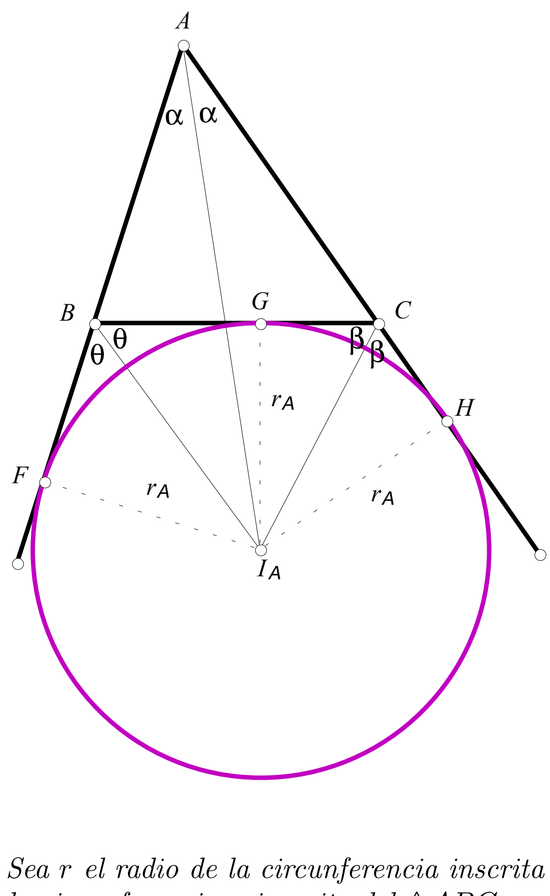
Ejercicio 156. *En un triángulo* $\triangle ABC$, *la bisectriz del ángulo* $\measuredangle A$ *intersecta al lado* BC *en* U. *Demuestra que la mediatriz de* AU, *la perpendicular a* BC *por* U *y el circundiámetro a través de* A *son concurrentes.*

Ejercicio 157. *En un triángulo* $\triangle ABC$, *sean* H *y* O *su ortocentro y circuncentro, respectivamente. Sea* M *el punto medio de* AB. *Sea* H_1 *el reflejado de* H *con respecto a* C *y sea* C_1 *el reflejado de* C *con respecto a* M. *Demuestra que* C_1, O *y* H_1 *están alineados.*

Ejercicio 158. *A través del ortocentro* H *de un triángulo* $\triangle ABC$, *se traza una paralela a* AB *la cual intersecta* BC *en* D. *También por* H *se traza una paralela a* AC *la cual intersecta a* BC *en* E. *Las perpendiculares a* BC *en* D *y* E *intersectan a* AB *y* AC *en* D' *y* E', *respectivamente. Demuestra que* $D'E'$ *intersecta al circuncírculo en los puntos* B' *y* C' *los cuales son diametralmente opuestos a los vértices* B *y* C, *respectivamente.*

5. Circunferencias exinscritas

En todos los triángulos existen 4 circunferencias que son tangentes a sus lados, sólo que algunas son tangentes a uno de los lados y a las prolongaciones de los otros dos. Sea I_A el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo $\measuredangle A$ y la bisectriz exterior del ángulo $\measuredangle C$. Como I_A pertenece a la bisectriz interior del ángulo $\measuredangle A$, entonces equidista de los lados AB y AC, pero como también pertenece a la bisectriz exterior del ángulo $\measuredangle C$ entonces equidista de los lados BC y AC. Lo anterior quiere decir que el punto I_A equidista de los lados AB y BC, esto es, que la bisectriz exterior del ángulo $\measuredangle B$ pasa por I_A, por lo tanto la bisectriz interior del ángulo $\measuredangle A$ y las bisectrices exteriores de los ángulos $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ concurren en un punto, al cual se le llama el *excentro* respectivo al lado BC y se denota comúnmente como I_A.Sean F, G, y H los pies de las perpendiculares desde I_A hacia los lados AB, BC, y CA.Tomamos la distancia I_AG como radio e I_A como centro y trazamos una circunferencia la cual es tangente a AB, BC, y CA en los puntos F, G, y H. Esta circunferencia es llamada la circunferencia exinscrita del lado BC. La distancia I_AG es el exradio y se denota como r_A.



Ejemplo 28. *Sea r el radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$. Sea r_A el radio de la circunferencia exinscrita del $\triangle ABC$, respectiva al lado*

a. Demuestra que

$$\frac{r}{r_A} = \frac{s-a}{s}$$

donde s es el semiperímetro del triángulo.

Solución 28. *En la figura anterior tenemos que $AF = AH$, además $AF + AH = AB + BG + GC + CA = 2s$, entonces $AH = AF = s$. Tenemos que*

$$\begin{aligned} |ABC| &= |AFI_AH| - |BFI_AHC| \\ &= |AFI_AH| - 2|BI_AC| \\ &= sr_A - ar_A \\ &= (s-a)r_A, \end{aligned}$$

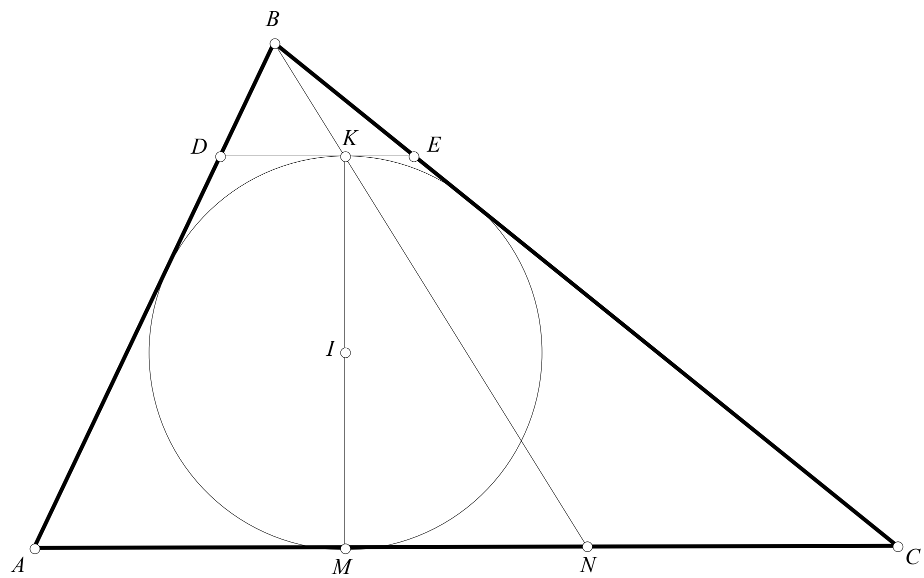
y como $|ABC| = sr$, entonces

$$(s-a)r_A = sr,$$

de donde obtenemos la igualdad deseada.

Ejemplo 29. *El $\triangle ABC$ tiene inscrita una circunferencia. Supongamos que M es el punto de tangencia de la circunferencia con el lado AC, MK es el diámetro. La recta BK corta AC en el punto N. Demuestra que $AM = NC$.*

Solución 29. *Por K trazamos la recta DE paralela a AC. El triángulo $\triangle BDE \sim \triangle BAC$. Tenemos que la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$ es la circunferencia exinscrita del triángulo $\triangle BDE$(respectiva al lado DE), entonces N es el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita del triángulo $\triangle ABC$ con el lado AC. Tenemos que $BC + CN = s$ lo cual implica que $NC = s - a$, y como sabemos que $AM = s - a$, concluimos que $AM = NC$.*



5.1. Ejercicios.

Ejercicio 159. *Demuestra que el triángulo* $\triangle ABC$ *es el triángulo órtico del triángulo* $\triangle I_A I_B I_C$.

Ejercicio 160. *Demuestra que*

$$|ABC| = (s-a)r_A = (s-b)r_B = (s-c)r_C.$$

Ejercicio 161. *Demuestra que*

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1}{r}.$$

Ejercicio 162. *Demuestra que*

$$Tan\left(\frac{\measuredangle A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Ejercicio 163. *Demuestra que*

$$Tan\left(\frac{\measuredangle A}{2}\right) Tan\left(\frac{\measuredangle B}{2}\right) = \frac{r}{r_C}.$$

Ejercicio 164. *Dado un* $\triangle ABC$, *por su vértice* C *pasan* $n-1$ *rectas* CM_1, CM_2, ... , CM_{n-1} *que lo dividen en* n *triángulos menores* $\triangle ACM_1$, $\triangle M_1CM_2$, ..., $\triangle M_{n-1}CB$ *(los puntos* M_1, M_2, ..., M_{n-1} *están sobre el lado* AB*). Supóngase que* $r_1, r_2, ..., r_n$ *y* $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ *denotan, respectivamente, los radios de los círculos inscritos de esos triángulos y los círculos exinscritos que se encuentran dentro del ángulo* $\measuredangle C$ *de cada triángulo. Sean* r *y* ρ

los radios de los círculos inscrito y exinscrito del propio triángulo $\triangle ABC$. *Probar que*

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \ldots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}.$$

EJERCICIO 165. *Sea* $ABCD$ *un trapecio isósceles, con* AB *paralelo a* CD. *La circunferencia inscrita del triángulo* $\triangle BCD$ *intersecta* CD *en* E. *Sea* F *el punto sobre la bisectriz interna del ángulo* $\measuredangle DAC$, *tal que* $EF \perp CD$. *El circuncírculo del triángulo* $\triangle ACF$ *intersecta la línea* CD *en* C *y* G. *Demuestra que el triángulo* $\triangle AFG$ *es isósceles.*

EJERCICIO 166. *En un paralelogramo* $ABCD$ *se trazan las circunferencias de centros* O *y* O' *y radios* R *y* R' *exinscritas a los triángulos* $\triangle ABD$ *y* $\triangle BCD$, *relativas a los lados* AD *y* CD, *respectivamente.*

a) *Demuestra que las circunferencias son tangentes a* BD *en un mismo punto* F.

b) *Demuestra que* D *es el ortocentro del triángulo* $\triangle OBO'$.

c) *Demuestra que* $FB \cdot FD = R \cdot R'$.

EJERCICIO 167. *En un triángulo acutángulo* $\triangle ABC$, *la bisectriz interna del ángulo* $\measuredangle A$ *intersecta la circunferencia circunscrita al triángulo* $\triangle ABC$ *en* A_1. *Los puntos* B_1 *y* C_1 *son definidos de manera semejante. Sea* A_0 *el punto de intersección de la línea* AA_1 *con las bisectrices externas de los ángulos* $\measuredangle B$ *y* $\measuredangle C$. *Los puntos* B_0 *y* C_0 *se definen de manera semejante. Demuestra que*

a) $|A_0B_0C_0| = 2|AC_1BA_1CB_1|$.

b) $|A_0B_0C_0| \geq 4|ABC|$.

6. Simedianas

En esta sección trataremos con unas líneas del triángulo, las cuales quizá sean un poco menos populares que las anteriores, pero los resultados concernientes con ellas resultan de gran utilidad al resolver problemas en los cuales es necesario probar que alguna línea divide por la mitad un segmento. Tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 7. *Una recta simétrica a la mediana de un triángulo, con respecto a la bisectriz del mismo ángulo del cual parte la mediana, se llama* simediana.

LEMA 1. *Sean l y m dos líneas isogonales con respecto al ángulo $\measuredangle BAC$ de un triángulo $\triangle ABC$. Sean P y Q, puntos sobre l y m, repectivamente. Entonces las distancias desde P hacia AB y AC son inversamente proporcionales a las respectivas distancias desde Q hacia AB y AC.*

DEMOSTRACIÓN. Sean x e y las distancias desde P hacia AB y AC, respectivamente; y sean r y s las distancias desde Q hacia AB y AC, respectivamente. Sean también, D y E los pies de las perpendiculares desde P y sean F y G los pies de las perpendiculares desde Q como se muestra en la figura. Para demostrar el lema basta con probar que

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{r}.$$

Para esto, tenemos que $\triangle ADP \sim \triangle AQG$ y con esto

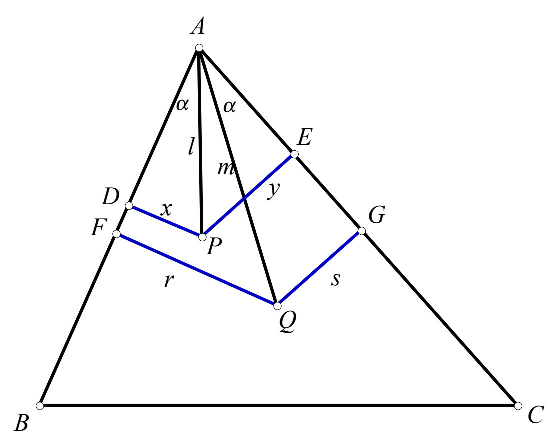
$$\frac{DP}{QG} = \frac{AP}{AQ},$$

también, como $\triangle APE \sim \triangle AQF$ tenemos que

$$\frac{PE}{FQ} = \frac{AP}{AQ},$$

entonces

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{r}.$$



∎

Tenemos ahora el siguiente teorema, el cual resulta de gran utilidad al trabajar con simedianas:

Teorema 16. *Supongamos que la simediana que parte del vértice A del triángulo $\triangle ABC$ corta BC en el punto K. Entonces tenemos que*

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Demostración. Sea M el punto medio del lado BC y sean x, y, r y s perpendiculares a los lados AB y AC como se muestra en la figura. Sabemos que

$$\frac{BK}{KC} = \frac{|ABK|}{|AKC|} = \frac{AB \cdot x}{AC \cdot y}.$$

Por otro lado, sabemos que

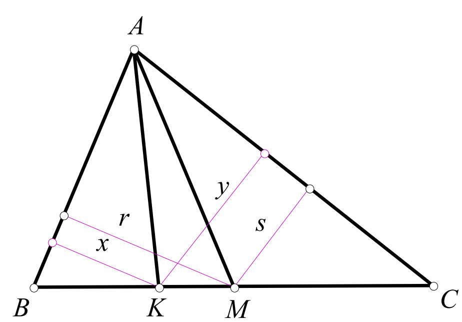
$$\frac{s}{r} = \frac{AB}{AC},$$

además, por el lema anterior tenemos que

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{r}.$$

Con esto tenemos que

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$



∎

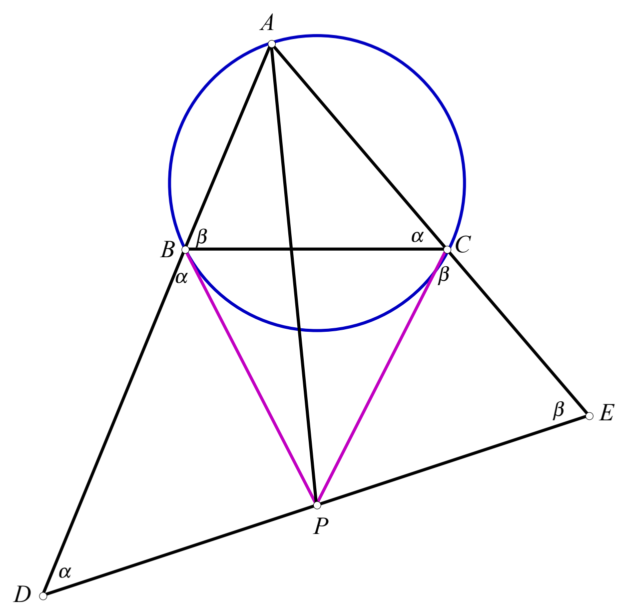
Utilizando este teorema y el Teorema de Ceva es sencillo demostrar que las tres simedianas en un triángulo concurren en un punto al cual llamaremos el *punto simediano*. Esto es fácil de verificar, ya que si denotamos con M, N y P a los puntos sobre los lados BC, CA y AB donde las simedianas respectivas los intersectan, tenemos que

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{BC^2}{AB^2} \cdot \frac{AC^2}{BC^2} = 1.$$

Ahora daremos una caracterización de la simediana de un triángulo, la cual en muchas ocasiones resulta ser muy útil.

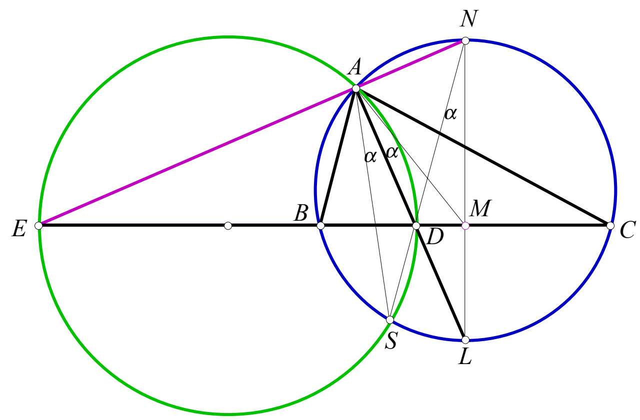
Ejemplo 30. *Las tangentes a la circunferencia circunscrita de un triángulo $\triangle ABC$ en los puntos B y C se intersectan en un puno P. Entonces tenemos que AP es la simediana del lado BC.*

Solución 30. *Por P trazamos una línea de manera que intersecte a la linea AB en un punto D tal que $DP = BP$. Esta misma línea intersecta a la línea AC en un punto E. Como $\measuredangle PBD = \measuredangle ACB = \alpha$, tenemos que $\measuredangle BDP = \alpha$, lo cual implica que $BDEC$ es un cuadrilátero cíclico. Entonces, $\measuredangle CEP = \measuredangle ABC = \measuredangle PCE = \beta$, es decir, $\triangle CPE$ es isósceles. Como $BP = PC$, tenemos que $DP = PE$, es decir, AP es la mediana del triángulo $\triangle ADE$ y como $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ tenemos que AP es la simediana del triángulo $\triangle ABC$ trazada hacia el lado BC.*



Ejemplo 31. *Demuestra que las cuerdas comunes de la circunferencia circunscrita con las* circunferencias de Apolonio *de un triángulo dado son simedianas de este triángulo.*

Solución 31. *Sabemos que la circunferencia de Apolonio del vértice A pasa por los pies de las bisectrices exterior e interior del mismo vértice. Sea E el pie de la bisectriz exterior y sea D el pie de la bisectriz interior, además, sea L el punto donde la bisectriz interior intersecta a la circunferencia circunscrita.*



Desde L trazemos la perpendicular a BC, la cual intersecta BC en el punto M y a la circunferencia circunscrita en N. La línea ND intersecta de nuevo al circuncírculo en un punto S. Sabemos que el cuadrilátero $DMNA$ es cíclico, entonces $\measuredangle DNM = \measuredangle DAM = \alpha$, además $\measuredangle SAL = \measuredangle SNL = \alpha$. Con esto tenemos que AS es simediana del triángulo $\triangle ABC$, sólo falta probar que el cuadrilátero $AESD$ es cíclico. Para esto, tenemos que $\measuredangle EAS = 90° - \alpha$ y como $\measuredangle EDS = \measuredangle MDN = 90° - \alpha$, tenemos que $AESD$ es cíclico. Con esto hemos probado que AS es la cuerda común de la circunferencia de Apolonio y la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$.

6.1. Ejercicios.

Ejercicio 168. *En un triángulo $\triangle ABC$ sea D el punto donde la simediana, trazada hacia el lado BC, intersecta al circuncírculo de éste. Demuestra que la línea CB es simediana del triángulo $\triangle ADC$.*

Ejercicio 169. *El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Los pies de las perpendiculares desde D hacia las líneas AB, BC, CA, son P, Q, R, respectivamente. Demuestra que las bisectrices de las ángulos ABC y CDA se intersectan sobre la línea AC si y sólo si $RP = RQ$. (IMO 2003/4)*

Ejercicio 170. *La tangente a la circunferencia circunscrita de un triángulo $\triangle ABC$ por el punto A intersecta a la línea BC en un punto P. Se traza la otra tangente a la circunferencia desde P y ésta la intersecta en un punto Q. Demuestra que AQ es simediana del triángulo $\triangle ABC$.*

Ejercicio 171. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero con AD paralelo a BC, los ángulos en A y B rectos y tal que el ángulo $\angle CMD$ es recto, donde M es el punto medio de AB. Sean K el pie de la perpendicular a CD que pasa por M, P el punto de intersección de AK con BD y Q el punto de intersección de BK con AC. Demuestra que el ángulo AKB es recto y que*

$$\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1.$$

Ejercicio 172. *Un hexágono convexo $ABCDEF$ está inscrito en una circunferencia de tal manera que $AB = CD = EF$ y las diagonales AD,*

BE y CF concurren en un punto. Sea P el punto de intersección de AD y CE. Demuestra que $\frac{CP}{PE} = \left(\frac{AC}{CE}\right)^2$.

Ejercicio 173. *Sea N el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia circunscrita de un triángulo $\triangle ABC$ trazadas por los puntos B y C. Sea M un punto en la circunferencia de tal manera que AM es paralelo a BC y sea K el punto de intersección de MN con la circunferencia. Demuestra que KA divide BC por la mitad.*

Ejercicio 174. *Desde un punto A exterior a una circunferencia están trazadas las tangentes AM y AN. También desde A se traza una secante que corta la circunferencia en los puntos K y L. Trazamos una recta arbitraria l paralela a AM. Supongamos que KM y LM cortan l en los puntos P y Q. Demuestra que la recta MN divide el segmento PQ por la mitad.*

Ejercicio 175. *La recta l es perpendicular al segmento AB y pasa por B. La circunferencia con el centro situado en l pasa por A y corta l en los puntos C y D. Las tangentes a la circunferencia en los puntos A y C se intersectan en N . Demuestra que la recta DN divide el segmento AB por la mitad.*

Ejercicio 176. *Dos circunferencias se intersectan en dos puntos. Sea A uno de los puntos de intersección. Desde un punto arbitrario que se halla en la prolongación de la cuerda común de las circunferencias dadas, están trazadas hacia una de éstas dos tangentes que tienen contacto con ésta en los puntos M y N. Sean P y Q los puntos de intersección de las rectas MA y NA, respectivamente, con la segunda circunferencia. Demuestra que la recta MN parte el segmento PQ por la mitad.*

Ejercicio 177. *Sea AD una altura de un triángulo $\triangle ABC$. Consideremos AD como diámetro de una circunferencia que corta los lados AB y AC en K y L, respectivamente. Las tangentes a la circunferencia en los puntos K y L se intersectan en un punto M. Demuestra que la recta AM divide BC por la mitad.*

Ejercicio 178. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo en el que $\measuredangle B > 90°$ y en el que un punto H sobre AC tiene la propiedad de que $AH = BH$, y BH es perpendicular a BC. Sean D y E los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Por H se traza una paralela a AB que corta a DE en F. Demuestra que $\measuredangle BCF = \measuredangle ACD$.*

Ejercicio 179. *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ tiene $AD = CD$ y $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC < 90°$. La recta por D y el punto medio de BC intersecta a la recta AB en un punto E. Demuestra que $\measuredangle BEC = \measuredangle DAC$.*

Ejercicio 180. *Se considera el triángulo $\triangle ABC$ y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia* *circunscrita. Demuestra que*

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

EJERCICIO 181. *Las tangentes en B y C al circuncírculo de un triángulo $\triangle ABC$ se cortan en X. Sea M el punto medio de BC. Probar que*

$$\measuredangle BAM = \measuredangle CAX \quad y \ \frac{AM}{AX} = Cos(\measuredangle BAC)\,.$$

EJERCICIO 182. *Dado un triángulo $\triangle ABC$ y su cincuncírculo Ω, denotaremos con A' el punto de intersección de las tangentes a Ω en B y C. Definimos B' y C' de manera similar.*
a) Demuestra que las líneas AA', BB' y CC' concurren.
b) Sea K el punto de concurrencia en a) y sea G el centroide del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que KG es paralela a BC, si y sólo si $2a^2 = b^2 + c^2$, donde a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo $\triangle ABC$.

CAPíTULO 3

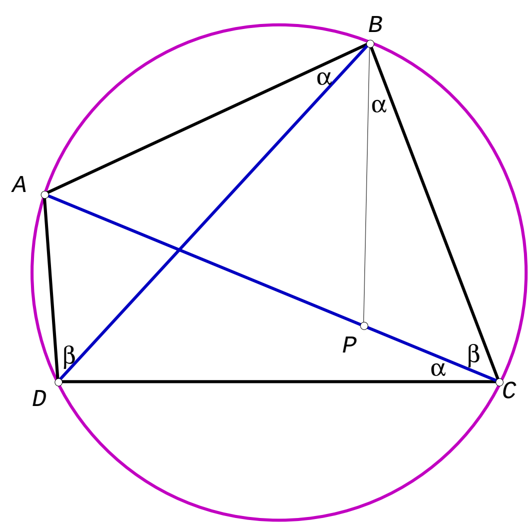
Teoremas selectos

1. Teorema de Ptolomeo

Teorema 17 (Teorema de Ptolomeo). *Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y sólo si*

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Demostración. Primero supongamos que el cuadrilátero es cíclico. Consideremos un punto P sobre la diagonal AC de tal manera que $\measuredangle PBC = \measuredangle ABD = \alpha$.



Dado que $ABCD$ es cíclico, también tenemos que $\measuredangle PCB = \measuredangle ADB = \beta$. De aquí se sigue que los triángulos $\triangle PBC$ y $\triangle ABD$ son semejantes, entonces

$$PC = \frac{BC \cdot AD}{BD}.$$

Como también $\triangle BAP$ y $\triangle BDC$ son semejantes, tenemos que

$$AP = \frac{AB \cdot CD}{BD}.$$

Sumando las dos expresiones obtenidas tenemos

$$AP + PC = AC = \frac{AB \cdot CD}{BD} + \frac{BC \cdot AD}{BD},$$

por lo tanto,

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

∎

1.1. Ejercicios.

Ejercicio 183. *El triángulo equilátero* $\triangle ABC$ *está inscrito en una circunferencia y en el arco* $\overset{\frown}{BC}$ *se toma un punto arbitrario* M. *Demuestra que* $AM = BM + CM$.

Ejercicio 184. *Sea* $A_0A_1 \dots A_{3n-1}$ *un* $3n-$ *ágono regular inscrito en una circunferencia. Desde un punto* P, *sobre la circunferencia, se trazan las cuerdas a los* $3n$ *vértices. Demuestra que la suma de las longitudes de las* n *cuerdas más grandes es igual a la suma de las longitudes de las restantes* $2n$ *cuerdas.*

Ejercicio 185. *Dado un triángulo* $\triangle ABC$, *sean* I *su incentro y* L *el punto donde la línea* AI *intersecta al circuncírculo. Demuestra que*

$$\frac{AL}{LI} = \frac{AB + AC}{BC}.$$

Ejercicio 186. *Una circunferencia pasa por el vértice* A *de un paralelogramo* $ABCD$ *e intersecta los lados* AB *y* AD *en los puntos* P *y* R, *respectivamente, y a la diagonal* AC *en el punto* Q. *Demuestra que* $AQ \cdot AC = AP \cdot AB + AR \cdot AD$.

Ejercicio 187. *El triángulo isósceles* $\triangle ABC$ $(AB = AC)$ *está inscrito en una circunferencia. Sea* P *un punto en el arco* $\overset{\frown}{BC}$. *Demuestra que*

$$\frac{PA}{PB + PC} = \frac{AC}{BC}.$$

Ejercicio 188. *Sea* AB *una cuerda en un círculo y* P *un punto sobre el círculo. Sea* Q *la proyección de* P *sobre* AB, R *y* S *las proyecciones de* P *sobre las tangentes al círculo en* A *y* B. *Demuestra que* PQ *es la media geométrica de* PR *y* PS, *esto es,* $PQ = \sqrt{PR \cdot PS}$.

Ejercicio 189. *Dado un heptágono* $ABCDEFG$ *de lado 1, demuestra que las diagonales* AC *y* AD *verifican*

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1.$$

Ejercicio 190. *Supongamos que* $ABCD$ *es un cuadrilátero cíclico y* x, y, z *son las distancias desde* A *hacia las líneas* BD, BC, CD, *respectivamente. Demuestra que*

$$\frac{BD}{x} = \frac{BC}{y} + \frac{CD}{z}.$$

EJERCICIO 191. *Dado un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, sean R y r el circunradio y el inradio, respectivamente. Sea O el circuncentro y sean d_A, d_B,d_C, las distancias desde O hacia los lados BC, CA, AB, respectivamente. Demuestra que $d_A + d_B + d_C = R + r$.*

2. Teorema de Carnot

LEMA 2. *Se dan dos puntos A y B. Demuestra que el lugar geométrico de los puntos M tales que $AM^2 - MB^2 = k$ (donde k es un número dado), es una recta perpendicular a AB.*

TEOREMA 18. *Teorema de Carnot. Demuestra que para que las perpendiculares bajadas desde los puntos A_1, B_1 y C_1 sobre los lados BC, CA y AB del triángulo $\triangle ABC$ se intersecten en un punto, es necesario y suficiente que $A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$.*

2.1. Ejercicios.

EJERCICIO 192. *Cinco puntos distintos A, B, C, D y E están sobre una línea con $AB = BC = CD = DE$. El punto F está fuera de la línea. Sea G el circuncentro del triángulo $\triangle ADF$ y H el circuncentro de triángulo $\triangle BEF$. Muestre que las líneas GH y FC son perpendiculares.*

EJERCICIO 193. *Se dan tres circunferencias que se intersectan de dos en dos. Demuestra que tres cuerdas comunes de estas circunferencias pasan por un mismo punto.*

EJERCICIO 194. *Se dan el triángulo regular $\triangle ABC$ y el punto arbitrario D; A_1, B_1 y C_1 son los centros de las circunferencias inscritas en los triángulos $\triangle BCD$, $\triangle CAD$ y $\triangle ABD$. Demuestra que las perpendiculares bajadas desde los vértices A, B y C sobre B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1, respectivamente, concurren en un punto.*

EJERCICIO 195. *En el hexágono convexo $ABCDEF$ tenemos que $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Probar que las perpendiculares bajadas desde los puntos C, E y A sobre las líneas BD, DF y FB, respectivamente, se intersectan en un punto.*

EJERCICIO 196. *En los rayos AB y CB del triángulo $\triangle ABC$ están trazados los segmentos AM y CN de tal manera que $AM = CN = p$, donde p es el semiperímetro del triángulo (B se halla entre A y M, así como entre C y N). Sea K el punto de la circunferencia circunscrita el cual es diametralmente opuesto a B. Demuestra que la perpendicular trazada desde K sobre MN pasa por el incentro del triángulo $\triangle ABC$.*

EJERCICIO 197. *Se dan una circunferencia y el punto A fuera de ésta. Una circunferencia que pasa por A, es tangente a la dada en el punto arbitrario B. Las líneas tangentes a la segunda por los puntos A y B se intersectan en el punto M. Hallar el lugar geométrico de los puntos M.*

Ejercicio 198. *Una circunferencia de centro O pasa por los vértices A y C de un triángulo $\triangle ABC$ y corta los segmentos AB y BC nuevamente en distintos puntos K y N, respectivamente. Las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle KBN$ se cortan exactamente en dos puntos distintos B y M. Demuestra que el ángulo $\measuredangle OMB$ es un ángulo recto.*

3. Teorema de Ceva y de Menelao

Teorema 19 (Teorema de Ceva). *Dado un triángulo $\triangle ABC$, sean D, E, F, puntos sobre las líneas BC, CA, AB, respectivamente. Entonces, AD, BE y CF concurren si y sólo si*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Teorema 20 (Teorema de Menelao). *Dado un triángulo $\triangle ABC$, sean D, E, F, puntos sobre las líneas BC, CA, AB, respectivamente. Entonces, D, E y F son colineales si y sólo si*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1.$$

3.1. Ejercicios.

Ejercicio 199. *Utilizando el teorema de Ceva demuestra que*
a) Las medianas de un triángulo concurren.
b) Las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo son concurrentes.
c) Las alturas de un triángulo son concurrentes.

Ejercicio 200. *Si D, E, F son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita al triángulo $\triangle ABC$ con los lados BC, CA, AB, respectivamente, demuestra que AD, BE, CF son concurrentes*[1].

Ejercicio 201. *Sean D, E, F, los puntos de los lados BC, CA, AB del triángulo $\triangle ABC$, tales que D esté en la mitad del perímetro a partir de A, E en la mitad a partir de B, y F en la mitad a partir de C. Demuestra que AD, BE, CF son concurrentes*[2].

Ejercicio 202. *Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito en un círculo. Demuestra que las diagonales AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si*

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

Ejercicio 203. *Sean X y X' los puntos de un segmento rectilíneo MN simétricos con respecto al punto medio de MN. Entonces X y X' se llaman un par de* puntos isotómicos *del segmento MN. Demuestra que si D y D', E y E', F y F' son puntos isotómicos de los lados BC, CA, AB del triángulo $\triangle ABC$, y si AD, BE, CF son concurrentes, entonces AD', BE', CF' también son concurrentes.*

[1]Este punto de concurrencia es llamado el punto de *Gergonne* del triángulo
[2]Este punto de concurrencia se llama punto de *Nagel* del triángulo

Ejercicio 204. *Sean* OX *y* OX' *rayos que pasan por el vértice* O *del ángulo* $\measuredangle MON$ *simétricos con respecto a la bisectriz del ángulo* $\measuredangle MON$*. Entonces* OX *y* OX' *se llaman un par de* rectas isogonales *para el ángulo* $\measuredangle MON$*. Demuestra que si* AD *y* AD', BE *y* BE', CF *y* CF', *son cevianas isogonales para los ángulos* A, B, C *del triángulo* $\triangle ABC$, *y si* AD, BE, CF *son concurrentes, entonces* AD', BE', CF' *también son concurrentes.*

Ejercicio 205. *Sean* AD, BE, CF *tres cevianas concurrentes del triángulo* $\triangle ABC$, *y sea la circunferencia que pasa por* D, E, F *tal que corte a los lados* BC, CA, AB *nuevamente en* D', E', F'*. Demuestra que* AD', BE', CF' *son concurrentes.*

Ejercicio 206. *Demuestra que las bisectrices de los ángulos externos de un triángulo cortan a los lados opuestos en tres puntos colineales.*

Ejercicio 207. *Dos paralelogramos* $ACBD$ *y* $A'CB'D'$ *tienen un ángulo común en* C*. Demuestra que* DD', $A'B$, AB' *son concurrentes.*

Ejercicio 208. *Sea* $ABCD$ *un paralelogramo y* P *un punto cualquiera. Por* P *trácense rectas paralelas a* BC *y a* AB *hasta que corten a* BA *y a* CD *en* G *y* H, *y a* AD *y* BC *en* E *y* F*. Demuestra que las rectas diagonales* EG, HF, DB *son concurrentes.*

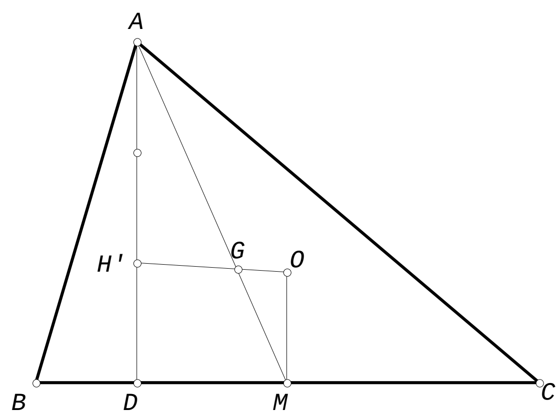
Ejercicio 209. *Si se construyen los triángulos equiláteros* $\triangle BCA'$, $\triangle CAB'$, $\triangle ABC'$ *exteriormente sobre los lados* BC, CA, AB *del triángulo* $\triangle ABC$, *demuestra que* AA', BB', CC' *son concurrentes en un punto* P.

Ejercicio 210. *Sea* A *la proyección del centro de una circunferencia sobre una recta dada* l*. Consideremos los puntos* B *y* C *en* l *de manera que* $AB = AC$*. Por* B *y* C *se trazan dos secantes arbitrarias a la circunferencia las cuales la cortan en los puntos* P, Q *y* M, N, *respectivamente. Supongamos que las rectas* NP *y* MQ *cortan la recta* l *en los puntos* R *y* S*. Demuestra que* $RA = AS$.

4. Línea de Euler

TEOREMA 21. *En todo triángulo, el ortocentro H, el gravicentro G y el circuncentro O se encuentran sobre una línea la cual es llamada línea de Euler. Además, $HG : GO = 2 : 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea M el punto medio del lado BC. Consideremos un punto H' sobre el rayo OG de tal manera que $H'G = 2 \cdot GO$. Sabemos que $AH' = 2 \cdot OM$ y que $AG = 2 \cdot GM$, además $\measuredangle AGH' = \measuredangle MGO$, entonces los triángulos $\triangle AGH'$ y $\triangle MGO$ son semejantes y sus lados están en razón $2 : 1$. Con esto, tenemos que AH' es paralela a OM y por lo tanto, perpendicular a BC. Análogamente, se demuestra que $BH' \perp AC$ y que $CH' \perp AB$, por lo tanto, $H' = H$ es el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$. Concluimos que H, G y O están alineados y que $HG : GO = 2 : 1$.



∎

4.1. Ejercicios.

EJERCICIO 211. *¿Qué lados corta la recta de Euler en los triángulos acutángulo y obtusángulo?*

EJERCICIO 212. *Sea K un punto simétrico al circuncentro de un triángulo $\triangle ABC$, con respecto al lado BC. Demuestra que la línea de Euler en el triángulo $\triangle ABC$ divide el segmento AK por la mitad.*

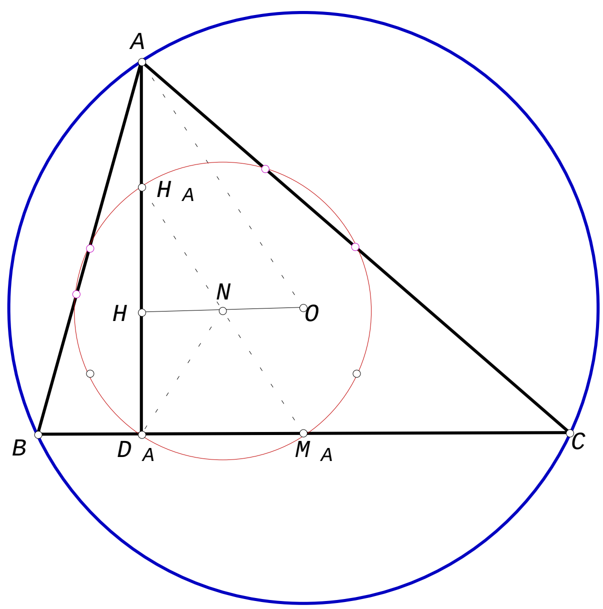
EJERCICIO 213. *Sea P un punto interior a un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, tal que los ángulos $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle CPA = 120°$. Demuestra que las líneas de Euler en los triángulos $\triangle APB$, $\triangle BPC$ y $\triangle CPA$ se cortan en un punto.*

EJERCICIO 214. *Demuestra que la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo dado, es la recta de Euler en el triángulo con vértices en los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo.*

5. Circunferencia de los nueve puntos

TEOREMA 22. *Consideremos los siguientes* 9 *puntos: los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen cada vértice con el ortocentro. Estos* 9 *puntos están sobre una circunferencia, la cual es llamada* Circunferencia de los Nueve Puntos, *su centro es el punto medio del segmento que une el circuncentro y el ortocentro y su diámetro es igual al circunradio del triángulo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean H_A, D_A, M_A, el punto medio de AH, el pie de la altura desde A, el punto medio de BC, respectivamente. De manera análoga se definen H_B, D_B, M_B, H_C, D_C, y M_C. Sea N el punto medio de HO. Sabemos que $AH = 2 \cdot OM_A$, entonces $H_AH = OM_A$ y además, como $H_AH =$ y OM_A son paralelas, tenemos que H_A, N y M_A son colineales. También sabemos que $ND_A = NH_A = NM_A$, además, $NH_A = \frac{1}{2}OA = R$, donde R es el circunradio del triángulo $\triangle ABC$. Con esto tenemos que los puntos H_A, D_A y M_A están a distancia $\frac{R}{2}$ del punto N. Análogamente se demuestra que H_B, D_B, M_B, H_C, D_C, y M_C están a distancia $\frac{R}{2}$ del punto N. Por lo tanto, los puntos H_A, D_A, M_A, H_B, D_B, M_B, H_C, D_C, y M_C están sobre una circunferencia de radio $\frac{R}{2}$ con centro en el punto medio de OH.



∎

5.1. Ejercicios.

EJERCICIO 215. *Demuestra que las perpendiculares trazadas desde los puntos medios de los lados de un triángulo, sobre las tangentes al circuncírculo en el vértice opuesto respectivo, concurren en el centro de la Circunferencia de los Nueve Puntos del triángulo.*

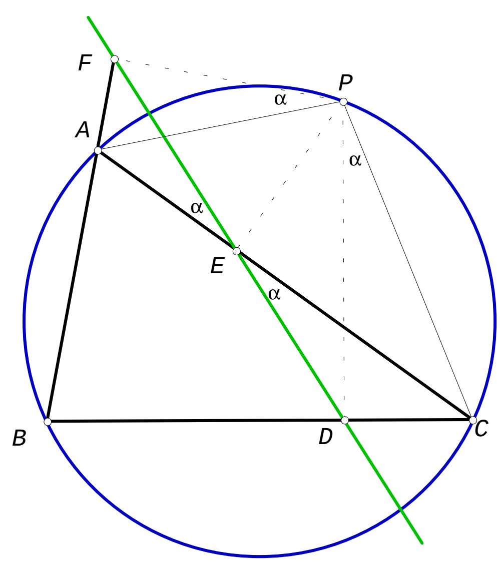
EJERCICIO 216. *Sean H el ortocentro de un triángulo $\triangle ABC$, D el punto medio del lado BC y P uno de los puntos de intersección de la recta HD con el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que D es el punto medio de HP.*

EJERCICIO 217. *En un triángulo $\triangle ABC$, sean BD la altura, BM la mediana, y P y Q las proyecciones de los puntos A y C sobre la bisectriz del ángulo $\measuredangle B$. Demuestra que los puntos D, M, P y Q están sobre una circunferencia cuyo centro está sobre la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $\triangle ABC$.*

6. Línea de Simson

TEOREMA 23. *Las proyecciones de un punto P que está sobre el circuncírculo de un triángulo hacia los lados de éste, son colineales. Esta línea es llamada* Línea de Simson del punto P*.*

DEMOSTRACIÓN. Sean D, E y F las proyecciones de P sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Tenemos que los cuadriláteros $PABC$, $PFAE$ y $PEDC$ son cíclicos. Además, como $\measuredangle PAF = \measuredangle PCD$ tenemos que $\measuredangle APF = \measuredangle CPD = \alpha$. Ahora, utilizando que los cuadriláteros $PFAE$ y $PEDC$ son cíclicos tenemos que $\measuredangle AEF = \measuredangle APF = \alpha$ y $\measuredangle CED = \measuredangle CPD = \alpha$. Con esto, hemos probado que los puntos D, E y F son colineales.



∎

6.1. Ejercicios.

EJERCICIO 218. *Demuestra que el ángulo comprendido entre las rectas de Simson que corresponden a dos puntos de una circunferencia, es equivalente a la mitad del arco entre estos puntos.*

EJERCICIO 219. *Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo $\triangle ABC$. La recta perpendicular a BC, la cual pasa por P, corta por segunda vez a la circunferencia en el punto M. Demuestra que la recta de Simson que corresponde al punto P, es paralela a la recta AM.*

EJERCICIO 220. *Demuestra que la proyección del lado AB de un triángulo $\triangle ABC$ sobre la recta de Simson que corresponde a un punto P, es igual a la distancia entre las proyecciones del punto P sobre los lados AC y BC.*

7. Teorema de Desargues y Teorema de Pappus

CAPíTULO 4

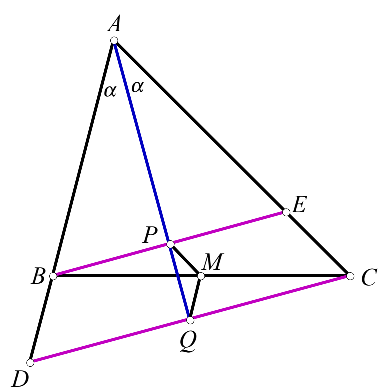
Algunas estrategias en Geometría

1. Prolongar segmentos

Algunas veces al prolongar ciertos segmentos podemos encontrar algunos detalles que nos facilitan la solución de un problema:

Ejemplo 32. *En un triángulo $\triangle ABC$ sea l la bisectriz del ángulo $\measuredangle A$. BP es perpendicular a l, CQ es perpendicular a l, y M es el punto medio de BC. Prueba que $MP = MQ$.*

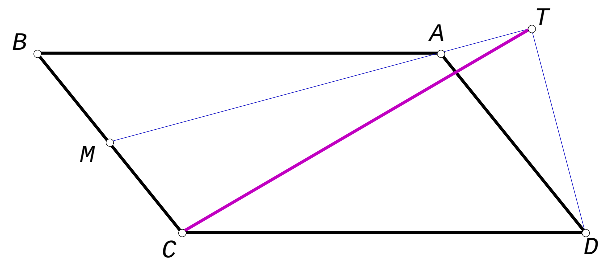
Solución 32. *Prolongamos BP y CQ hasta que intersecten a AC y AB en E y D, respectivamente. Sabemos que los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle ADC$ son isósceles, entonces $BD = EC$. Como P y M son puntos medios de los segmentos BE y BC, respectivamente, tenemos que PM es paralela a EC y además $PM = \frac{1}{2}EC$. Análogamente, tenemos que $MQ = \frac{1}{2}BD$ y con esto tenemos que $PM = MQ$.*



Ejercicio 221. *Lo mismo que en el ejemplo anterior pero ahora l es una línea arbitraria que pasa por el vértice A.*

Ejercicio 222. *En un triángulo escaleno $\triangle ABC$ se traza la bisectriz interior BD, con D sobre BC. Sean E y F, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde A y C hacia la recta BD, y sea M el punto sobre el lado BC tal que DM es perpendicular a BC. Demuestra que $\measuredangle EMD = \measuredangle DMF$. (Iberoamericana 2002/4)*

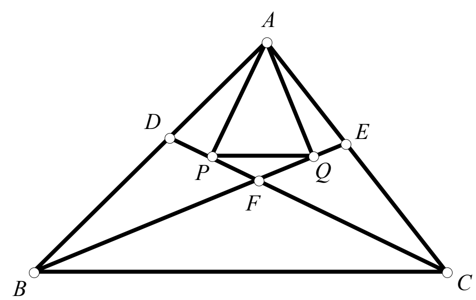
Ejercicio 223. *En un paralelogramo $ABCD$, M es el punto medio de BC. DT es dibujada desde D y perpendicular a MA, como se muestra en la figura. Prueba que $CT = CD$.*



EJERCICIO 224. *En un triángulo $\triangle ABC$ sean H el ortocentro, O el circuncentro, sea AL la bisectriz de el $\measuredangle BAC$. Demuestra que AL bisecta el $\measuredangle HAO$.*

EJERCICIO 225. *Sea XY una cuerda de longitud constante la cual se desliza sobre un semicírculo. Sea M el punto medio de la cuerda, C y D las proyecciones de los puntos X y Y sobre el diámetro AB. Prueba que el triángulo $\triangle MCD$ es isósceles y nunca cambia su forma.*

EJERCICIO 226. *En un triángulo $\triangle ABC$ se trazan las bisectrices de los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle ACB$ y éstas intersectan los lados AC y AB en los puntos E y D, respectivamente. Consideramos los puntos P y Q sobre las líneas CD y BE, respectivamente, de manera que $AP \perp CD$ y $AQ \perp BE$. Demuestra que PQ es paralelo a BC.*



EJERCICIO 227. *Está dada la circunferencia Ω. Desde un punto exterior P se trazan dos líneas tangentes a Ω las cuales la tocan en A y B. También por P se traza una secante l a Ω. Desde el centro de Ω se traza una recta perpendicular a l la cual corta a Ω en el punto K y a l en C (el segmento BK corta a l). Demuestra que BK bisecta el ángulo $\measuredangle ABC$.*

En ocasiones nos conviene prolongar los segmentos hasta obtener una longitud, la cual es mencionada en el problema:

EJEMPLO 33. *Sean a, b y c los lados BC, CA y AB, de un triángulo $\triangle ABC$. Sea I el incentro y D el punto donde la bisectriz del $\measuredangle BAC$ corta al lado BC. Demuestra que*

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}.$$

Solución 33. *Observemos que la longitud $b+c$ aparece en la igualdad que queremos demostrar, entonces, prolongamos el rayo CA hasta el punto E de tal manera que $EA = AB = c$. Así, hemos construido el segmento $EC = b+c$. Como el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles, tenemos que $\measuredangle BEA + \measuredangle EBA = 2\alpha = \measuredangle BAC$, entonces EB es paralela a AD. Aplicando el Teorema de la Bisectriz al triángulo $\triangle ADC$ tenemos que*

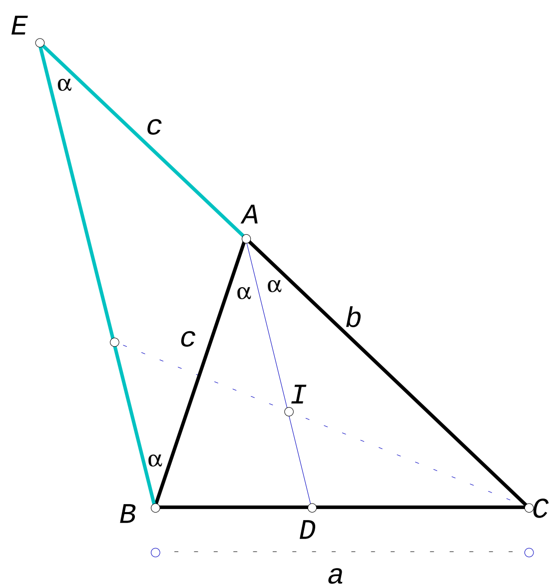
$$\frac{AI}{ID} = \frac{AC}{CD},$$

además

$$\frac{AC}{CD} = \frac{EC}{BC} = \frac{b+c}{a}.$$

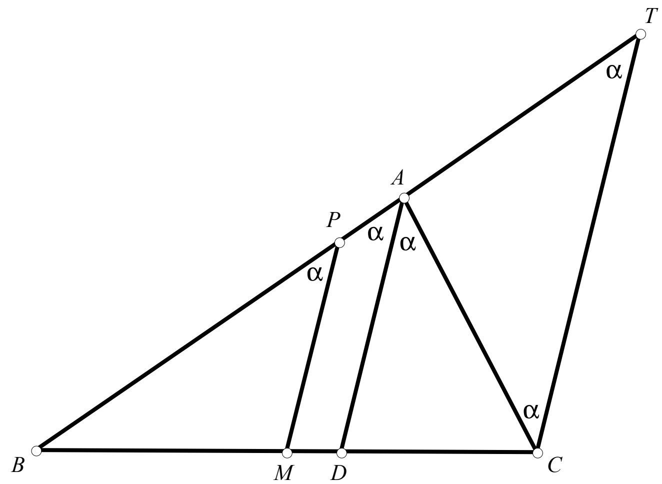
Por lo tanto

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}.$$



Ejemplo 34. *Dado un triángulo $\triangle ABC$ tenemos que $AB > AC$. Sea M el punto medio de BC. La bisectriz del $\measuredangle BAC$ corta al lado BC en el punto D. Por M se traza una línea la cual corta al lado AB en el punto P. Si $BP = PA + AC$, demuestra que MP es paralela a AD.*

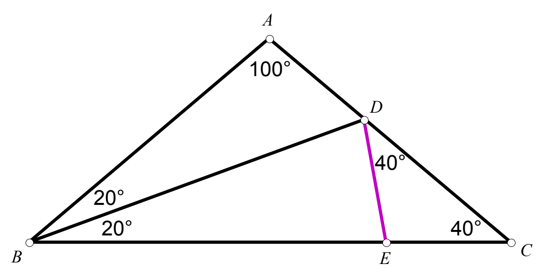
Solución 34. *Prolongamos el lado BA hasta el punto T de manera que $AT = AC$. Sea $\measuredangle BAD = \measuredangle DAC = \alpha$. Como el triángulo $\triangle TAC$ es isósceles tenemos que $\measuredangle ATC + \measuredangle ACT = \measuredangle BAC = 2\alpha$, entonces $\measuredangle ATC = \measuredangle ACT = \alpha$. De lo anterior, tenemos que CT es paralela a AD, además, como $BP = PA + AC = PA + AT = PT$ tenemos que PM es paralela a TC y por lo tanto paralela a AD.*



También puede ocurrir que resulte más útil tomar un punto en el interior de un segmento de tal manera que se nos forme algún triángulo isósceles:

Ejemplo 35. *En un triángulo* $\triangle ABC$, $\measuredangle BAC = 100°$, $AB = AC$. *Se elige un punto* D *en el lado* AC *de modo que* $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD$. *Pruebe que* $AD + DB = BC$.

Solución 35. *Tomamos un punto* E *sobre* BC *de tal manera que* $BE = BD$. *Como* $\measuredangle BED = \measuredangle ECD + \measuredangle EDC = 80°$ *tenemos que* $\measuredangle EDC = 40°$, *entonces* $DE = EC$. *Basta probar que* $AD = DE$. *Como tenemos que el cuadrilátero* $ABED$ *es cíclico y* $\measuredangle ABD = \measuredangle EBD = 20°$, *entonces* $AD = DE$ *y así* $BD + AD = BD + DE = BE + EC = BC$.



Ejercicio 228. *Sea* M *un punto sobre el arco* CB *(el cual no contiene a* A*) de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero* $\triangle ABC$. *Demuestra que* $BM + CM = AM$.

Ejercicio 229. *Sobre los lados* AB *y* AC *de un triángulo* $\triangle ABC$ *se construyen hacia afuera los cuadrados* $ABNM$ *y* $CAPQ$. *Sea* D *el punto medio del lado* BC. *Prueba que* $PM = 2 \cdot AD$.

Ejercicio 230. *Sea* $\triangle ABC$ *un triángulo con* $\measuredangle BCA = 60°$ *y* $AC < BC$. *El punto* D *está sobre el lado* BC *y cumple* $BD = AC$. *El lado* AC *es extendido hasta el punto* E *donde* $AC = CE$. *Prueba que* $AB = DE$.

Ejercicio 231. *En el triángulo $\triangle ABC$ con $AB > AC$, D es el punto medio del lado BC; E está sobre el lado AC. Los puntos P y Q son los pies de las perpendiculares desde B y E a la línea AD. Demuestra que $BE = AE + AC$ si y sólo si $AD = PQ$.*

Ejercicio 232. *Las bisectrices de los ángulos A y B del triángulo $\triangle ABC$ intersectan los lados BC y CA en los puntos D y E, respectivamente. Si se cumple que $AE + BD = AB$, determina el ángulo C.*

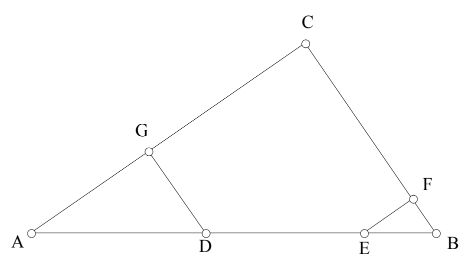
Ejercicio 233. *Una circunferencia tiene su centro en el lado AB de un cuadrilátero cíclico $ABCD$. Los otros tres lados son tangentes a la circunferencia. Demuestra que $AD + BC = AB$. (IMO 1985)*

Ejercicio 234. *El ángulo A es el menor de los ángulos del triángulo $\triangle ABC$. Los puntos B y C dividen a la circunferencia circunscrita del triángulo en dos arcos. Sea U un punto interior del arco BC que no contiene a A. Las mediatrices de AB y AC cortan a la recta AU en V y W, respectivamente. Las rectas BV y CW se cortan en T. Demuestra que $AU = TB + TC$. (IMO 1997)*

Ejercicio 235. *En un triángulo ΔABC sea AP la bisectriz de $\measuredangle BAC$ con P sobre BC, y sea BQ la bisectriz de $\measuredangle ABC$ con Q sobre CA. Se sabe que $BAC = 60°$ y que $AB + BP = AQ + QB$. ¿Cuáles son los posibles valores de los ángulos el triángulo ΔABC? (IMO 2001/5)*

2. Trazar perpendiculares

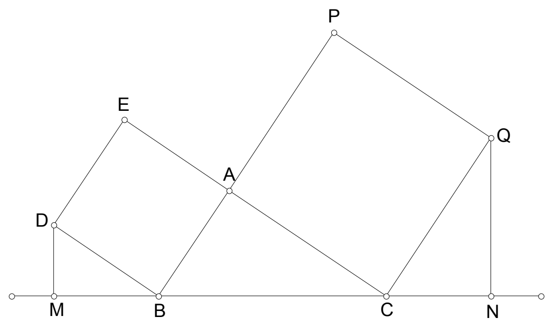
Ejercicio 236. *En un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, con ángulo recto en C, $BD = BC$, $AE = AC$, $EF \perp BC$, y $DG \perp AC$. Prueba que $DE = EF + DG$.*



Ejercicio 237. *En un triángulo $\triangle ABC$, la altura CE es extendida hasta G de tal manera que $EG = AF$, donde AF es la altura trazada hacia BC. Una línea a través de G y paralela a AB intersecta CB en H. Prueba que $HB = AB$.*

Ejercicio 238. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Tomando como diámetros los lados del cuadrilátero y con centro en los puntos medios de éstos, se construyen cuatro circunferencias. Prueba que estas cuatro circunferencias cubren completamente al cuadrilátero.*

Ejercicio 239. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en A. Se construyen los cuadrados $ABDE$ y $CAPQ$ como se muestra en la figura siguiente. Se trazan las perpendiculares DM y QN hacia el lado BC. Prueba que $DM + QN = BC$.*



Ejercicio 240. *En un triángulo isósceles $\triangle ABC$, $AB = AC$, se extiende CB a través de B hasta un punto P. Una línea desde P, paralela a la altura BF, intersecta AC en D. Se dibuja PE perpendicular a AB. Prueba que $BF + PE = PD$.*

Ejercicio 241. *Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo tal que AB es paralelo a ED, BC es paralelo a FE y CD es paralelo a AF. Sean R_A, R_C y R_E los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle FAB$, $\triangle BCD$ y $\triangle DEF$, respectivamente; y sea p el perímetro del hexágono. Prueba que*

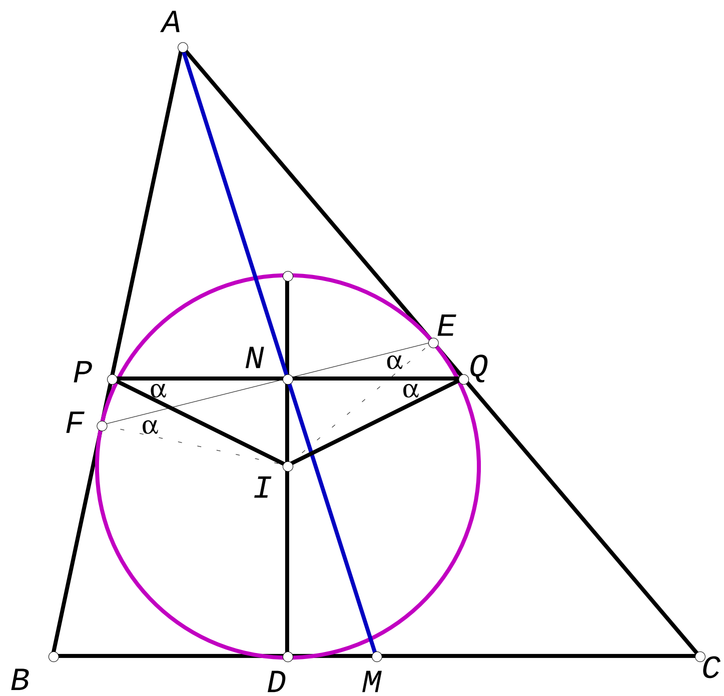
$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$

(IMO 1996/5)

3. Trazar paralelas

Ejemplo 36. *El incírculo del triángulo $\triangle ABC$ toca los lados AB, BC y CA en los puntos F, D y E, respectivamente. El diámetro del incírculo, el cual pasa por el punto D, intersecta al segmento EF en el punto N. Demuestra que la línea AN divide al lado BC por la mitad.*

Solución 36. *Por N trazamos el segmento PQ paralelo a BC, como se muestra en la figura. Bastará entonces demostrar que el triángulo $\triangle PIQ$ es isósceles. Como ID es perpendicular a BC (I es el incentro del triángulo) tenemos que $\measuredangle DNP = \measuredangle DNQ = 90°$, además, como los ángulos $\measuredangle IFP$ e $\measuredangle IEQ$ también son rectos, tenemos que los cuadriláteros $IFPN$ e $INEQ$ son cíclicos. De aquí obtenemos que $\measuredangle IPN = \measuredangle IFN$ e $\measuredangle IQN = \measuredangle IEN$, es decir, $\measuredangle IPN = \measuredangle IQN$. lo cual implica que el triángulo $\triangle PIQ$ es isósceles.*



Ejemplo 37. *En los lados opuestos BC y DA de un cuadrilátero convexo se toman los puntos M y N, de tal manera que $BM : MC = AN : ND = AB : CD$. Demuestra que la recta MN es paralela a la bisectriz del ángulo formado por los lados AB y CD.*

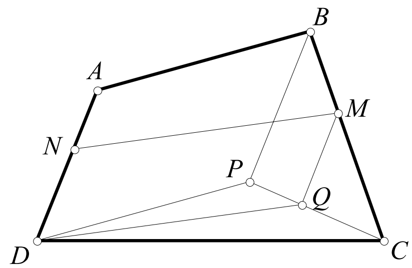
Solución 37. *Por B y D se trazan paralelas a AD y AB, respectivamente, las cuales se intersectan en el punto P. Por M se traza un paralela a BP la cual intersecta a PC en el punto Q. Tenemos que*

$$\frac{MQ}{BP} = \frac{CM}{CB} = \frac{DN}{DA}$$

y como $BP = AD$ entonces $MQ = ND$, además MQ es paralelo a ND y con esto tenemos que $NMQD$ es un paralelogramo. También tenemos que

$$\frac{PQ}{QC} = \frac{BM}{MC} \Longrightarrow \frac{PQ}{QC} = \frac{AB}{DC} = \frac{DP}{DC}.$$

Por el Teorema de la Bisectriz tenemos que DQ bisecta el ángulo $\measuredangle PDC$ y como NM es paralela a DC, concluimos que NM es paralela a la bisectriz del ángulo formado por las rectas AB y DC.



Ejercicio 242. *Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares en una circunferencia de radio R. Prueba que $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.*

Ejercicio 243. *Un trapecio $ABCD$, con AB paralelo a CD, tiene sus diagonales AC y BD perpendiculares. Prueba que*

$$AC^2 + BD^2 = (AB + DC)^2.$$

Ejercicio 244. *Sea O un punto en el interior de un triángulo equilátero $\triangle ABC$ con lados de longitud a. Las líneas AO, BO y CO intersectan los lados en los puntos A_1, B_1 y C_1. Prueba que $OA_1 + OB_1 + OC_1 < a$.*

Ejercicio 245. *Sea P un punto en el interior de un triángulo equilátero $\triangle ABC$. Desde P se bajan las perpendiculares PD, PE y PF a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Encuentra*

$$\frac{PD + PE + PF}{BD + CE + AF}.$$

Ejercicio 246. *Se toma un punto P en el interior de un rectángulo $ABCD$ de tal manera que $\measuredangle APD + \measuredangle BPC = 180°$. Encuentra la suma de los ángulos $\measuredangle DAP$ y $\measuredangle BCP$.*

Ejercicio 247. *Sean MN, PQ, RS tres segmentos iguales en los lados de un triángulo equilátero. Demuestra que en el triángulo formado por las líneas QR, SM y NP, los segmentos QR, SM y NP, son proporcionales a los lados en los que están contenidos.*

Ejercicio 248. *En el cuadrilátero convexo $ABCD$, las diagonales AC y BD son perpendiculares y los lados opuestos AB y DC no son paralelos. El punto P, interesección de las mediatrices de AB y DC, está en el interior del cuadrilátero $ABCD$. Demuestra que los vértices de $ABCD$ están en una misma circunferencia si y sólo si los triángulos ΔABP y ΔCDP tienen áreas iguales. (IMO 1998/1)*

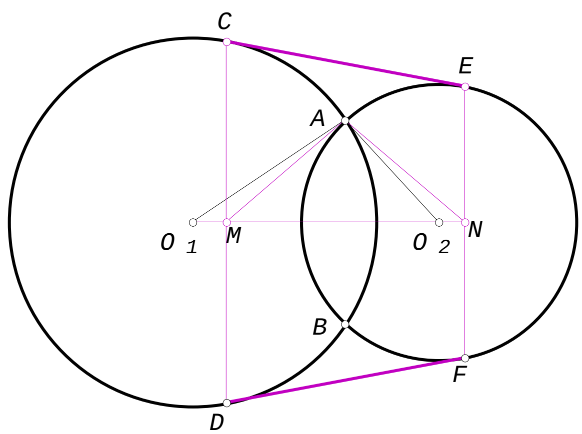
4. Trazar tangentes y cuerdas comunes

Cuando tenemos dos circunferencias tangentes, interior o exteriormente, en ocasiones es muy útil trazar la línea tangente a las dos circunferencias la cual pasa por el punto común de ellas:

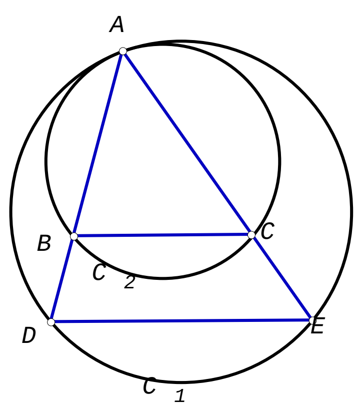
Ejercicio 249. *Dos circunferencias son tangentes exteriormente en un punto A. BC es una tangente común externa. Demuestra que $\measuredangle BAC = 90°$.*

EJERCICIO 250. *Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se intersectan en los puntos A y B, como se muestra en la figura. La línea CE y DF son las tangentes exteriores comunes de las circunferencias y M, N, son los puntos medios de las cuerdas CD y EF. Demuestra que*

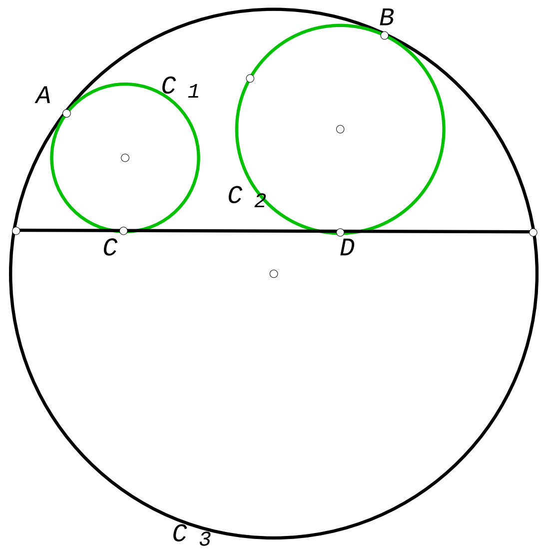
$$\measuredangle MAN = \measuredangle O_1AO_2.$$



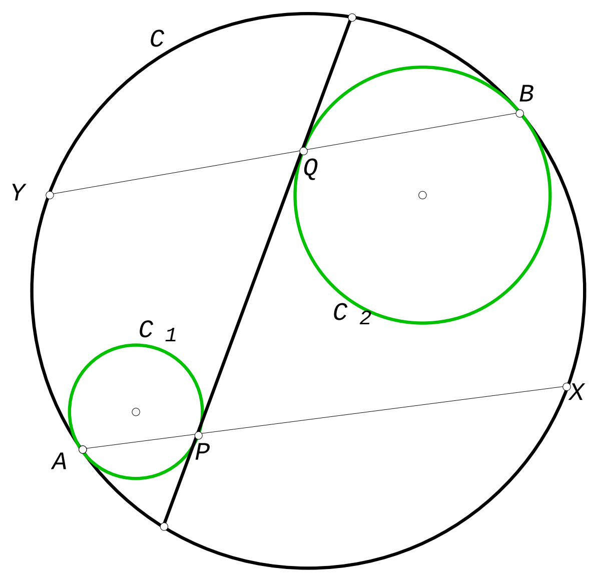
EJERCICIO 251. *Las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes en el punto A, como se muestra en la figura. A partir del punto A se trazan dos rectas, las cuales intersectan a C_1 y C_2 en los puntos B, C, D y E como se muestra en la figura. Demuestra que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son semejantes.*



EJERCICIO 252. *Las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes a C_3 en los puntos A y B, respectivamente. Se traza una tangente exterior común a C_1 y C_2 la cual toca a las circunferencias en los puntos C y D, respectivamente. Demuestra que las rectas AC y BD se intersectan en un punto sobre la circunferencia C_3.*



Ejercicio 253. *Las circunferencias* C_1 *y* C_2 *son tangentes interiormente a la circunferencia* C *en los puntos* A *y* B*, respectivamente, como se ve en la figura. La tangente interior común a* C_1 *y* C_2 *toca a estas circunferencias en* P *y* Q*, respectivamente. Demostrar que las rectas* AP *y* BQ *intersectan a la circunferencia* C *en puntos diametralmente opuestos.*



Ejercicio 254. *Sean* Γ_1 *y* Γ_2 *dos circunferencias las cuales son tangentes exteriormente en un punto* I*, y sea* Γ *una circunferencia la cual es tocada internamente por* Γ_1 *y* Γ_2 *en los puntos* R *y* S*, respectivamente. Sea* AB *la cuerda de* Γ *la cual es tangente exterior a* Γ_1 *y* Γ_2 *en* T *y* U*, respectivamente. La tangente común en* I *a* Γ_1 *y* Γ_2 *intersecta a* Γ *en* C *y* D*, con* C *sobre el mismo lado de* AB *que* I*.*

a) Demuestra que los puntos R, T, D son colineales.
b) Demuestra que I es el incentro del triángulo $\triangle ABC$.

EJERCICIO 255. *Dos circunferencia Γ_1 y Γ_2 están dentro de la circunferencia Γ, y son tangentes a Γ en puntos distintos M y N, respectivamente. La circunferencia Γ_1 pasa por el centro de la circunferencia Γ_2. La recta que pasa por los dos puntos de intersección de Γ_1 y Γ_2 corta a Γ en los puntos A y B. Las rectas MA y MB cortan a Γ_1 en los puntos C y D, respectivamente. Demuestra que CD es tangente a Γ_2. (IMO 1999/5)*

EJERCICIO 256. *Dos Γ_1 y Γ_2 se cortan en M y N. Sea l la tangente común a Γ_1 y Γ_2 tal que M está más cerca de l que N. La recta l es tangente a Γ_1 en A y a Γ_2 en B. La recta paralela a l que pasa por M corta de nuevo a Γ_1 en C y a Γ_2 en D. Las rectas CA y DB se intersectan en E; las rectas AN y CD se intersectan en P; las rectas BN y CD se intersectan en Q. Demuestra que $EP = EQ$. (IMO 2000/1)*

EJERCICIO 257. *Sean S_1 y S_2 dos circunferencias de centros O_1 y O_2, respectivamente, secantes en M y N. La recta t es la tangente común a S_1 y S_2 más cercana a M. Los puntos A y B son los respectivos puntos de contacto de t con S_1 y S_2; C el punto diametralmente opuesto a B y D el punto de intersección de la recta O_1O_2 con la recta perpendicular a la recta AM que pasa por B. Demuestra que M, D y C están alineados. (Iberoamericana 2000/2)*

5. Construir un ángulo

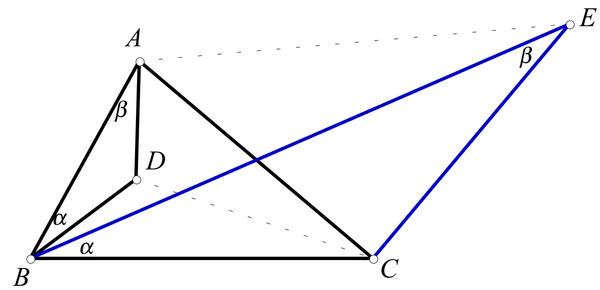
EJEMPLO 38. *Se escoge un punto D en el interior de un triángulo escaleno $\triangle ABC$ de tal manera que $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB + 90°$ y $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Encuentra*

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}.$$

SOLUCIÓN 38. *Se traza el segmento CE de la misma longitud que AC y de tal manera que CE es perpendicular a AC(aqui hemos formado el ángulo $\measuredangle ACB + 90°$). Tenemos que $\measuredangle BCE = \measuredangle BDA$, además $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{EC}$ lo cual implica que $\triangle ABD \sim \triangle EBC$. Por otro lado, como $\measuredangle ABE = \measuredangle DBC$ y $\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BC}$ tenemos que*

$$\triangle ABE \sim \triangle DBC \Longrightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD}$$

$$\Longrightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{\sqrt{2}AC}{CD} \Longrightarrow \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}.$$



Ejercicio 258. *Encuentra el valor del lado de un decágono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita a éste.*

Ejercicio 259. *Sea AD la mediana del triángulo $\triangle ABC$. Sabemos que $\measuredangle DAC + \measuredangle ABC = 90°$. Halla el $\measuredangle BAC$ si se sabe que $AB \neq AC$.*

Ejercicio 260. *Sea M el punto medio del lado BC de un triángulo ABC. Se sabe que $\measuredangle BAM = \frac{1}{2}\measuredangle MAC$. Se extiende AM a través de M hasta un punto D de tal manera que $\measuredangle ABD = 90°$. Demuestra que*

$$AC = \frac{1}{2}AD.$$

Ejercicio 261. *En el triángulo $\triangle ABC$, $AB = AC$ y $\measuredangle BAC = 80°$. En el interior del triángulo se toma el punto M de tal manera que $\measuredangle MBC = 30°$ y $\measuredangle MCB = 10°$. Halla el ángulo $\measuredangle AMC$.*

Ejercicio 262. *En el triángulo $\triangle ABC$ tenemos que el $\measuredangle BCA$ es obtuso y $\measuredangle BAC = 2\measuredangle ABC$. La línea a través de B y perpendicular a BC intersecta la línea AC en D. Sea M el punto medio de AB. Demuestra que $\measuredangle AMC = \measuredangle BMD$.*

Ejercicio 263. *Sean P y Q puntos en el interior de un triángulo $\triangle ABC$ tales que $\measuredangle PAB = \measuredangle QAC$ y $\measuredangle PBA = \measuredangle QBC$. Encuentra*

$$\frac{PA \cdot QA}{AB \cdot AC} + \frac{PB \cdot QB}{AB \cdot BC} + \frac{PC \cdot QC}{BC \cdot AC}.$$

Ejercicio 264. *Sea P un punto interior al triángulo $\triangle ABC$ tal que $\measuredangle APB - \measuredangle ACB = \measuredangle APC - ABC$. Sean D y E los incentros de los triángulos $\triangle APB$ y $\triangle APC$, respectivamente. Demuestra que AP, BD y CE son concurrentes. (IMO 1996/2)*

Ejercicio 265. *En un triángulo $\triangle ABC$ sea AP la bisectriz de $\measuredangle BAC$ con P sobre BC, y sea BQ la bisectriz de $\measuredangle ABC$ con Q sobre CA. Se sabe que $BAC = 60°$ y que $AB + BP = AQ + QB$. ¿Cuáles son los posibles valores de los ángulos el triángulo $\triangle ABC$? (IMO 2001/5)*

6. Reflejar puntos

Ejercicio 266. *Sea P un punto en el interior de un triángulo equilátero $\triangle ABC$. Sabemos que $PA = 3$, $PB = 4$ y $PC = 5$. Encuentra el área del triángulo $\triangle ABC$.*

Ejercicio 267. *A través del punto medio C de una cuerda arbitraria AB de una circunferencia, se han trazado dos cuerdas KL y MN (K y M se encuentran en un mismo lado de AB), Q es el punto de intersección de AB y KN, P es el punto de intersección de AB y ML. Demuestra que $QC = CP$.*[1]

7. Construir triángulos equiláteros

Ejercicio 268. *Sea $ABCD$ un hexágono convexo con $AB = BC = CD$ y $DE = EF = FA$, tal que $\measuredangle BCD = \measuredangle EFA = 60°$. Sean G y H puntos en el interior del hexágono tales que $\measuredangle AGB = \measuredangle DHE = 120°$. Prueba que $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$. (IMO 1995/5)*

Ejercicio 269. *Sea P un punto en el interior de un triángulo equilátero $\triangle ABC$. Sabemos que $PA = 3$, $PB = 4$ y $PC = 5$. Encuentra el área del triángulo $\triangle ABC$.*

Ejercicio 270. *Sean MN, PQ, RS tres segmentos iguales en los lados de un triángulo equilátero. Prueba que en el triángulo formado por las líneas QR, SM y NP, los segmentos QR, SM y NP, son proporcionales a los lados en los que están contenidos.*

Ejercicio 271. *Dado un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, localiza el punto P en el interior del triángulo para el cual la suma $PA + PB + PC$ es mínima.(Este punto es conocido como punto de Torricelli)*

Ejercicio 272. *Un hexágono convexo tiene la propiedad de que, para cada par de lados opuestos, la distancia entre sus puntos medios es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ veces la suma de sus longitudes. Demuestra que todos los ángulos del hexágono son iguales. (IMO 2003/3)*

8. Ir hacia atrás

Ejemplo 39. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que las líneas AB y DC se intersectan en un punto Q y las líneas DA y CB se intersectan en un punto P. Prueba que las bisectrices*[2] *de los ángulos $\measuredangle DPC$ y $\measuredangle AQD$ son perpendiculares.*

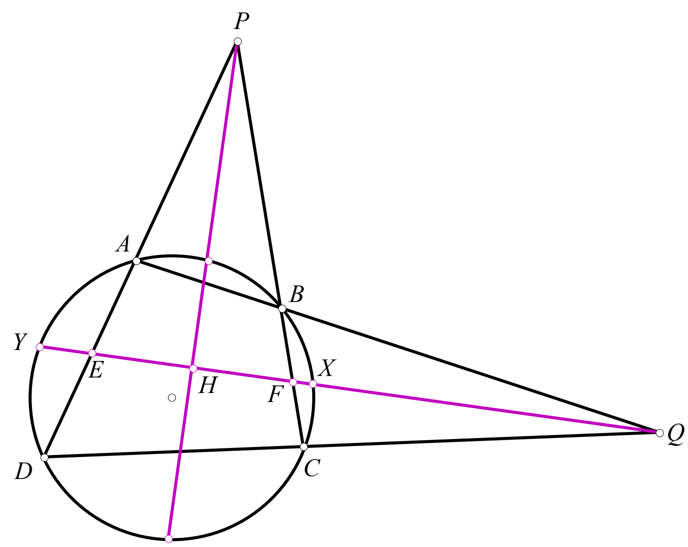
Solución 39. *Sea H el punto de intersección de las dos bisectrices mencionadas. Sean Y y X los puntos donde la bisectriz del $\measuredangle AQD$ intersecta a la circunferencia y sean E y F los puntos donde esta bisectriz intersecta a los lados AB y BC. Probar que $\measuredangle PHQ = 90°$ es equivalente a probar que el triángulo $\triangle PEF$ es isósceles. Para probar esto utilizaremos una técnica que resulta muy útil al resolver problemas y a la cual denominaremos* ir hacia atrás. *La idea es suponer válido el resultado que queremos demostrar e ir observando que otros resultados también serían válidos. Se hace esto hasta que lleguemos a un resultado el cual sea fácil de demostrar o sea conocido*

[1]Este resultado es conocido como el *Teorema de la Mariposa*.

[2]La bisectriz de un ángulo divide a éste en dos ángulos de la misma medida.

por nosotros de alguna manera. Una vez hecho esto tratamos de regresarnos siguiendo los pasos en orden inverso. Aplicando esta técnica al problema tenemos lo siguiente:

$\triangle PEF$ *isósceles* $\Longrightarrow \measuredangle PEF = \measuredangle PFE \Longrightarrow \overset{\frown}{DY} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BX} = \overset{\frown}{YA} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{XC} \Longrightarrow \overset{\frown}{DY} + \overset{\frown}{BX} = \overset{\frown}{YA} + \overset{\frown}{XC} \Longrightarrow \overset{\frown}{DY} - \overset{\frown}{XC} = \overset{\frown}{YA} - \overset{\frown}{BX}$. *Esto último es cierto debido a que QY es la bisectriz del ángulo $\measuredangle AQD$. El regreso se lleva a cabo sin dificultad alguna en este caso.*



9. Usando a Ceva y Menelao

Ejercicio 273. *Sea A la proyección del centro de una circunferencia sobre una recta dada l. Consideremos los puntos B y C en l de manera que $AB = AC$. Por B y C se trazan dos secantes arbitrarias a la circunferencia las cuales la cortan en los puntos P, Q y M, N, respectivamente. Supongamos que las rectas NP y MQ cortan la recta l en los puntos R y S. Demuestra que $RA = AS$.*

Ejercicio 274. *Sea P un punto sobre la altura AD de un triángulo $\triangle ABC$. Las líneas BP y CP intersectan a los lados AC y AB en los puntos E y F, respectivamente. Demuestra que AD bisecta el ángulo $\measuredangle FDE$.*

10. El punto falso (falsa posición)

Ejercicio 275. *Las diagonales dividen un cuadrilátero convexo en cuatro triángulos. Los inradios de estos triángulos son iguales. Demuestra que el cuadrilátero dado es un rombo.*

11. Problemas misceláneos

Ejercicio 276. *El $\triangle ABC$ tiene inscrita una circunferencia, M es el punto de tangencia que tiene la circunferencia con el lado BC, MK es el* *diámetro. La recta AK corta la circunferencia en el punto P. Demuestra que la tangente a la circunferencia en el punto P divide el lado BC por la mitad.*

EJERCICIO 277. *Sea l una recta que pasa por el ortocentro de un triángulo. Demuestra que las rectas simétricas a l, con respecto a los lados del triángulo, concurren en un punto.*

EJERCICIO 278. *Desde un punto sobre la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo equilátero $\triangle ABC$ están trazadas rectas paralelas a BC, CA y AB, las cuales cortan CA, AB y BC en los puntos M, N y Q, respectivamente. Demuestra que M, N y Q están alineados.*

EJERCICIO 279. *En los lados AC y BC del triángulo $\triangle ABC$, hacia el exterior están construidos dos paralelogramos $ACDE$ y $BCFG$. Las prolongaciones de DE y FG se intersectan en el punto H. Sobre el lado AB está construido el paralelogramo $ABML$, cuyos lados AL y BM son iguales y paralelos a HC. Demuestra que*

$$|ABML| = |ACDE| + |BCFG|.$$

EJERCICIO 280. *Dado un triángulo $\triangle ABC$, se trazan las bisectrices interiores de los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$. Después, se trazan paralelas a esas líneas a través del punto C, las cuales intersectan a las bisectrices en los puntos D y E. Si DE es paralela a AB, prueba que el triángulo es isósceles.*

EJERCICIO 281. *Sea ΔABC un triángulo acutángulo con circuncentro O. Sea P sobre el lado BC el pie de la altura desde A. Supongamos que $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Demuestra que $\measuredangle CAB + \measuredangle COP < 90°$. (IMO 2001/1)*

EJERCICIO 282. *.Sea BC el diámetro de la circunferencia Γ que tiene centro O. Sea A un punto de Γ tal que $0° < \measuredangle AOB < 120°$. Sea D el punto medio del arco AB que no contiene a C. La paralela a DA que pasa por O intersecta a AC en J. La mediatriz de OA intersecta a Γ en E y F. Prueba que J es el incentro del triángulo ΔCEF. (IMO 2002/2)*

EJERCICIO 283. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. El círculo con diámetro BC intersecta los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sea O el punto medio del lado BC. Las bisectrices de los ángulos BAC y MON se intersectan en R. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos $\triangle BMR$ y $\triangle CNR$ tienen un punto común sobre el lado BC. (IMO 2004/1)*

EJERCICIO 284. *En un cuadrilátero convexo $ABCD$ la diagonal BD no bisecta ninguno de los ángulos ABC ni CDA. Un punto P está dentro de $ABCD$ y satisface que*

$$\measuredangle PBC = \measuredangle DBA \ \text{ y } \measuredangle PDC = \measuredangle BDA.$$

Demuestra que $ABCD$ es cíclico si y sólo si $AP = CP$. (IMO 2004/5)

Bibliografía

[1] H.S.M.Coxeter (19xx). *Introducción a la geometría*, LIMUSA, 12/A, 62-67.

[2] H.S.M. Coxeter, Samuel L. Greitzer (19xx). *Retorno a la geometría*, No me acuerdo.

[3] I. Shariguin (1989). *Problemas de geometría, Planimetría*, MIR-Moscú.

[4] Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind (1988). *Challenging problems in geometry*, Dover.

[5] Levi S. Shively (1984). *Introducción a la geometría moderna*, CECSA.

[6] V. Gúsiev, V. Litvinenko, A. Mordkóvich (1989). *Prácticas para resolver problemas matemáticos, Geometría*, MIR-Moscú.

[7] Ross Honsberger (1995). *Episodes in ninteenth and twentieth century euclidean geometry*, The Mathematical Association of America.

[8] Howard Eves (19xx). *Estudio de las geometrías*, LIMUSA.

[9] I. Martin Isaacs (2002). *Geometría universitaria*, Thomson Learning.